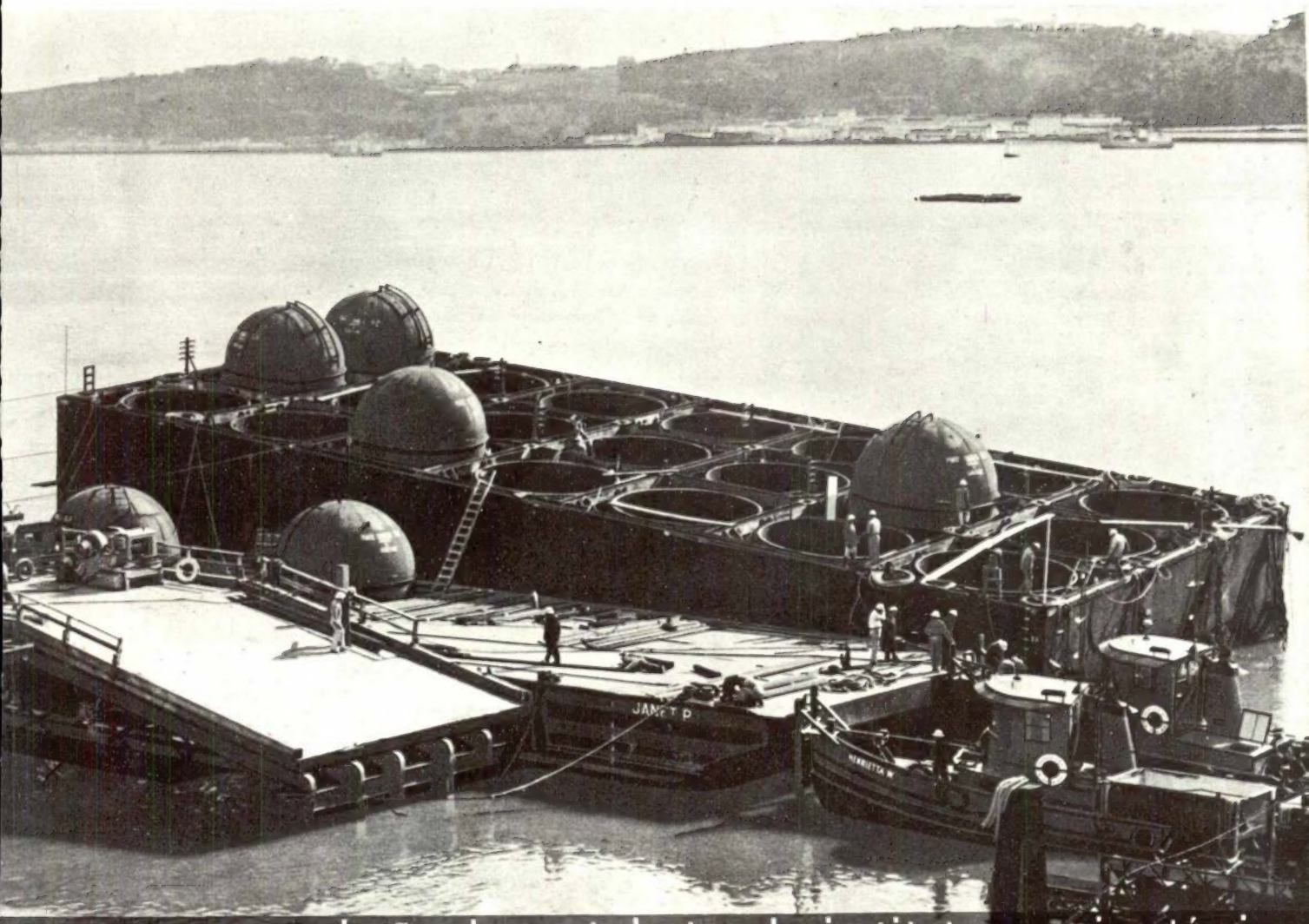
técnica



325

associação dos estudantes do instituto superior técnico

fevereiro 1963

revista de engenharia

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 49 91

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO
E DA CACHOFARRA

●

A **UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA** distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

PAVIMENTOS

COBERTURAS

VIGAS DE GRANDE VÃO

ASNAS

PERFIS

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.

AV. ESTADOS UNIDOS DA AMERICA, LOTE 3, 5.º D. TELEF. 774832/766446 LISBOA-5

TÉCNICA

Ano XXXVIII - N.º 325 Fevereiro de 1963

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-1. * TELEF. 77 01 44 (Linha 50)

CORPO REDACTORIAL

J. M. VIEGAS GONÇALVES
A. ROMÃO DIAS
J. F. GOMES DE PINA
A. M. L. ESTEVES BRINCA

NUMERO AVULSO 15$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	37$50	60$00	110$00
Ultramar Português e Espanha	—	85$00	120$00
Estrangeiro	—	70$00	130$00

PUBLICAÇÃO PERIÓDICA

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Ponte sobre o Tejo — Secção flutuante de aço destinada à construção das fundações da torre Norte. Peso na altura do lançamento: 700 toneladas.

Págs.

Saudação
Por J. N. Ferreira Dias J.or 299

Formas Matriciais em Problemas de Extremos
Por A. Gouvêa Portela 301

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional** 306

Agua fortemente radioactiva do Sul de Portugal Continental
Por A. Herculano de Carvalho e C. Moura Pulido 307

Condução do calor em sólidos em regime variável — (Soluções pelo método de separação de váriáveis)
Por José Joaquim Delgado Domingos 309

Notas sobre a estabilização de solos
Por Úlpio Nascimento 323

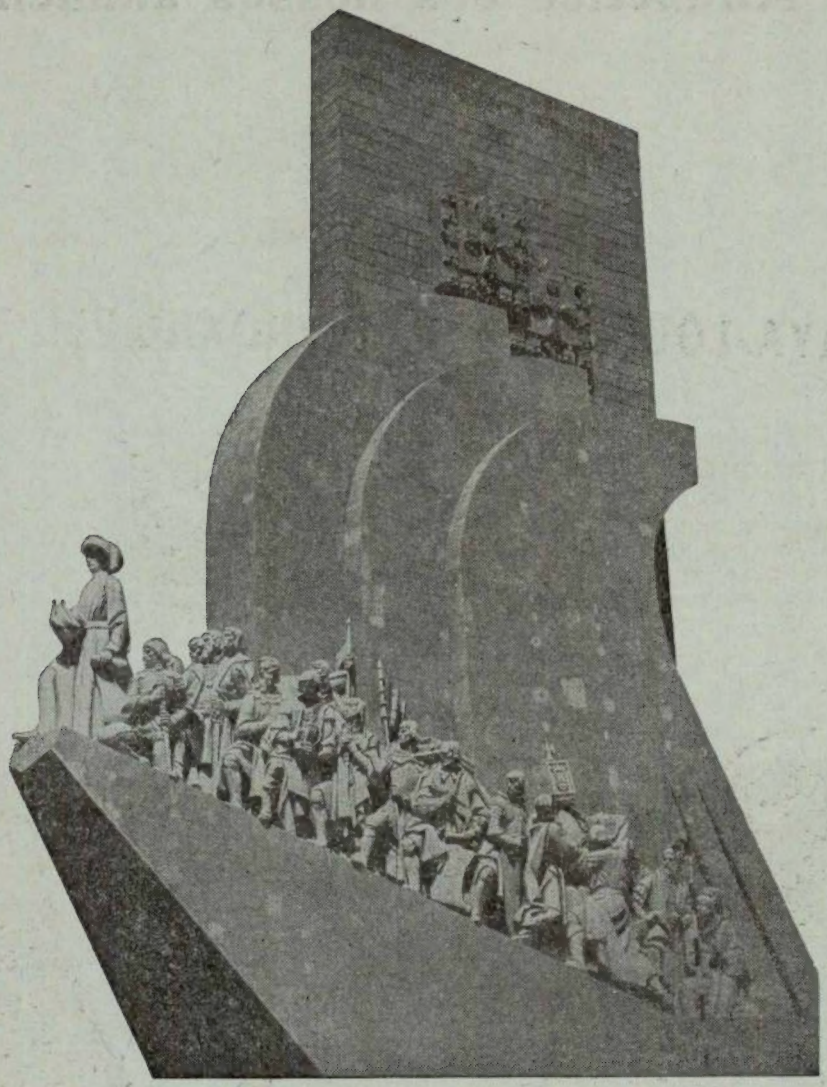
Introdução aos processos estocásticos
Por Alexandre Gomes Cerveira 349

Biblioteca 377

OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

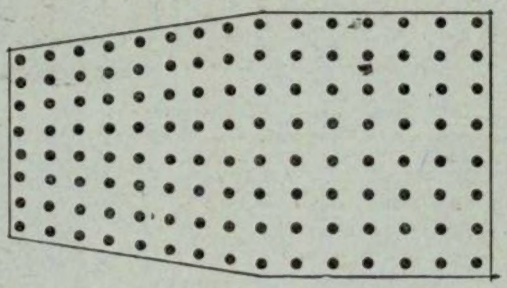
	Pág.
A	
Agência Comercial, Lda.	IV
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XL
Agro-Mecânica	XXV
Araldite	XXIV
Asea Eléctrica Ld.ª	XXIV
Austin	XXX
C	
CUF — Centro de Projectos	XV
CIDEX	IV
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VIII
Companhia Cimento «Tejo»	XLI
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos	XXXVI
Companhia Portuguesa de Trefilaria	XXII
Companhia União Fabril	XIV
Construções Técnicas, Ltd.ª	XXIX
C. Santos, Ltd.ª	VI e XLII
E	
Ecomar	XXVI
Electro-Arco, Ltd.ª	XXVI
Electrotécnicos Reunidos	XXXII
Emílio de Azevedo Campos & C.ª, Ltd.ª	XXXV
Empresa Electro Cerâmica	XLIV
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XXII
Empresa de fundações A. Cavaco	XXVI
Estores Sunway	XVIII
F	
Fábrica Portugal	II
Fanafel	XVI
Filfro, Lda.	XXXII
Fluitherma	XXXI
G	
Guedes & Almeida, Lda.	IX
H	
Hydrel	XXVI
I	
Impermeábilis	XXII
Isolux, Lda.	XLVI
J	
Jayme da Costa, Lda	XXXIII
K	
Kellog International Corporation	XXXVIII
M	
Monterroso & C.ª, Lda.	XXV
O	
Orlando Fernandes	XVI
P	
Papelaria Fernandes	XVII
Pimentel & Casquilho, Ltd.ª	III
Promec	XXXIV
Q	
Química Hoechst, Limitada	XXXI
S	
Sanfer, Lda.	XLV
S. E. Moniz da Maia & Vaz Guedes, L.da	XIII
Siemens	XXIII
Soabal, Ltd.	XIX
S. Com. de Isolamentos de Cortiça	XXXVII
SMEIA	XXVII
Soc. Comercial Romar, Lda.	XXII
Sociedade Construtora Portuguesa, Ltd.ª	I
Sociedade de Electricidade Brown Boveri	4.ª da capa
Société Louis de Roll	V
Sociedade Comercial Luso-Italiana	XLIII
Sociedade Industrial Metalúrgica	XLIV
Sociedade Michaelis de Vasconcellos	XII
Sociedade Portuguesa do Ar Líquido	XXVIII
Sociedade Portuguesa Cavan	VIII
Socied. Portuguesa de Válvulas, Ld.ª	XX
Sondagens Ródio, Ltd.ª	XLIV
Standard Eléctrica	VII
U	
União Eléctrica Portuguesa	2.ª da capa
V	
Vasco Pessoa, Lda.	XXIV
Volkswagen	XXXV
W	
Wild Portugal, Lda.	XXI



O PADRÃO DAS DESCOBERTAS

(Praça do Império LISBOA)

ASSENTE SOBRE 120 ESTACAS FRANKI DE 120 TONELADAS COM UM COMPRIMENTO MEDIO DE 18 METROS POR ESTACA.



FUNDAÇÕES FRANKI

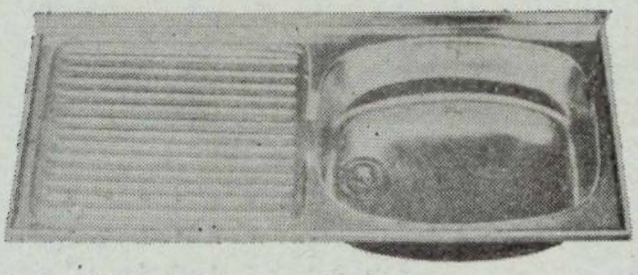
Sociedade Construtora Portuguesa, Lda.

PRAÇA DO AREEIRO, n.º 9, 4.º-Esq. — LISBOA — TEL. 72 60 61 e 72 99 11

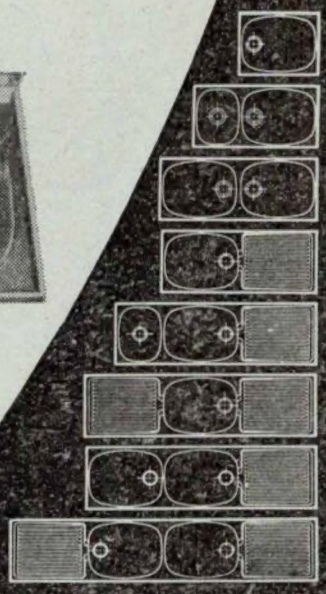
LAVA-LOUÇAS EM AÇO INOXIDAVEL

Modernize os lares de Portugal, usando nas suas cozinhas Lava-Louças em AÇO INOXIDÁVEL. Concepção e execução da

FABRICA PORTUGAL



elegantes e higiênicos · duração ilimitada · revestidos de isolante especial · fornecidos com sifão de segurança · não partem a louça



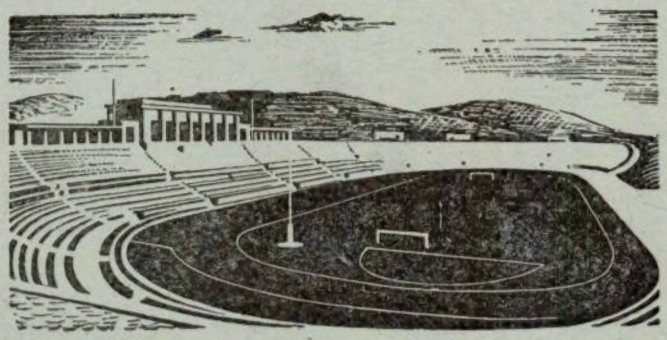
- 8 MODELOS STANDARD · OUTROS MODELOS FORA DE SÉRIE
- MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES
- IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE E NOS SEUS SALÕES DE EXPOSIÇÃO E VENDA

PRAÇA DOS RESTAURADORES — RUA FEBO MONIZ

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

QUASE 40 ANOS
AO SERVIÇO DA
ENGENHARIA PORTUGUESA



GRANDE SORTIDO
DE INSTRUMENTOS DE
PRECISÃO, CIENTÍFICOS
E INDUSTRIAIS

RUA DAS PORTAS DE SANTO ANTÃO, 75
LISBOA
TELEF.: 32 43 14 — 32 42 48 ✦ TELEG.: TECNA

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

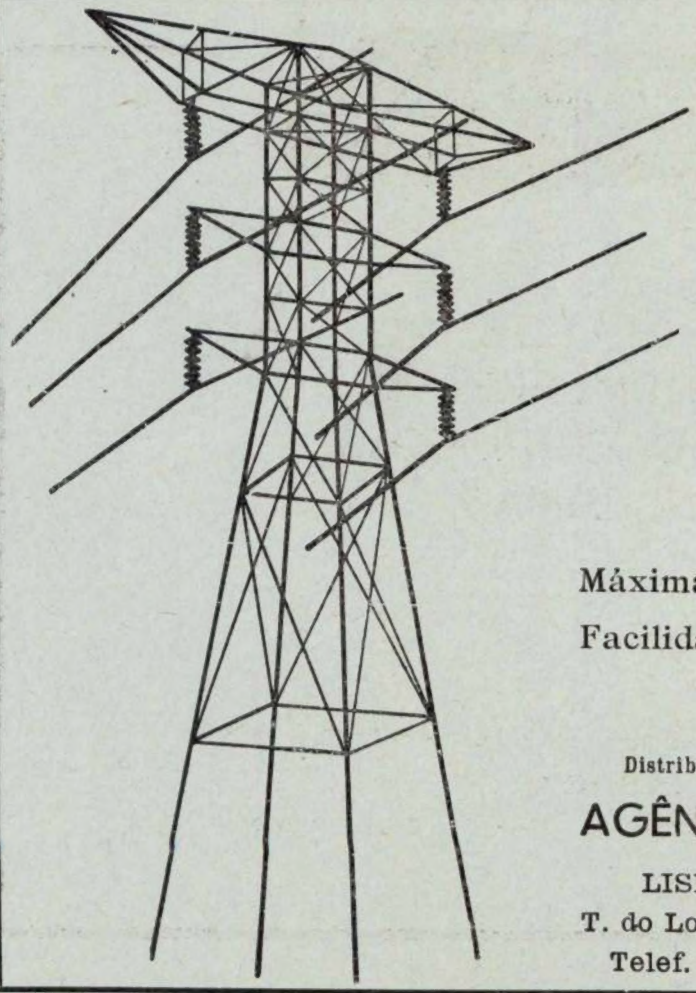
Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.º/Telef. 73 53 07/LISBOA 1



METALIZAÇÃO A FRIO

NEODON

NEODON + ZINCO =
NEODONZINKGRUND

Máxima protecção
Facilidade de aplicação

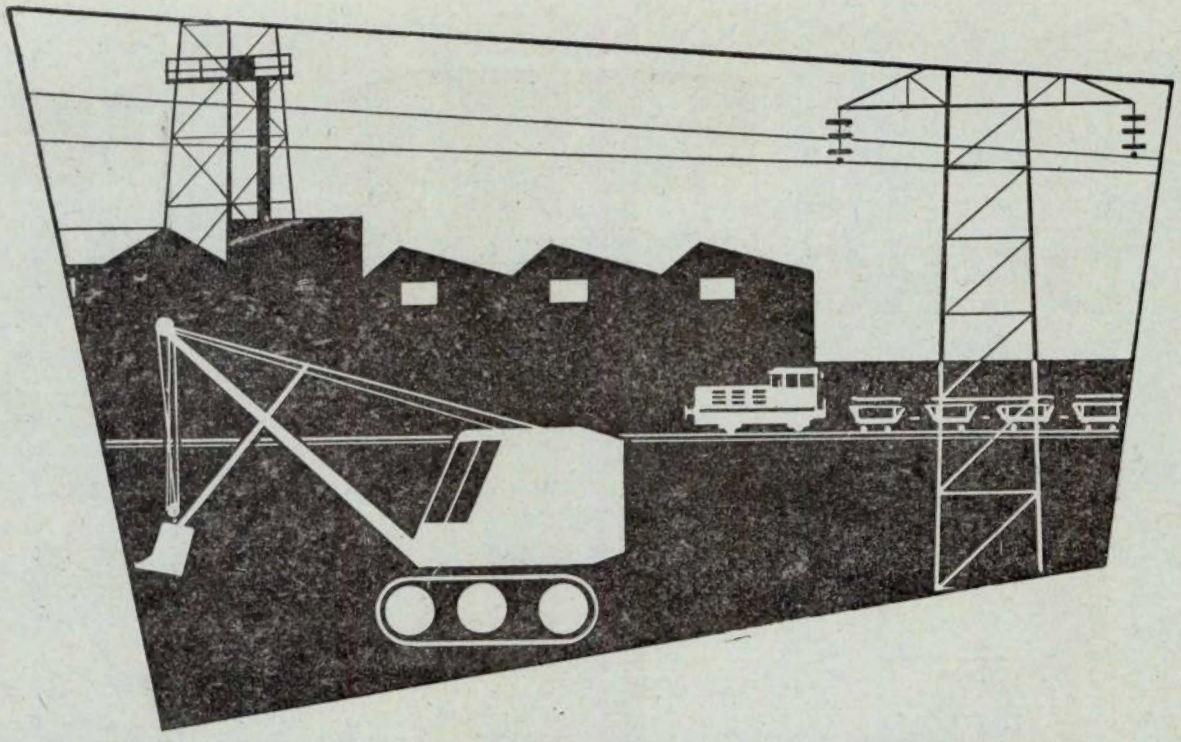
Distribuidores exclusivos:

AGÊNCIA COMERCIAL, L.DA

LISBOA
T. do Loureiro, 3
Telef. 4 90 54

ÉVORA
R. da República, 93
Telef. 2 33 63

DE ROLL
Máquinas
para as indústrias
de produtos
químicos,
alimentares
e cerâmicos
VON ROLL
aço esmaltado
fundição
esmaltada
Klus (Suiça)
DE ROLL Fábricas de Klus
Representantes
em Portugal:
Socotel, L. da
Rua de
Sá da Bandeira,
651-4.º Esq.
Porto-Tel. 27013



MERCEDES-BENZ

MOTORES INDUSTRIAIS DIESEL

MOTORES PARA TODAS AS APLICAÇÕES INDUSTRIAIS
FAMOSOS EM TODO O MUNDO PELA SUA GRANDE ROBUSTÊS. ECONOMIA
DE CONSUMO E FACILIDADE DE MANUTENÇÃO
MODELOS DESDE 15 A 2.500 H. P.

EM ARMAZÉM:

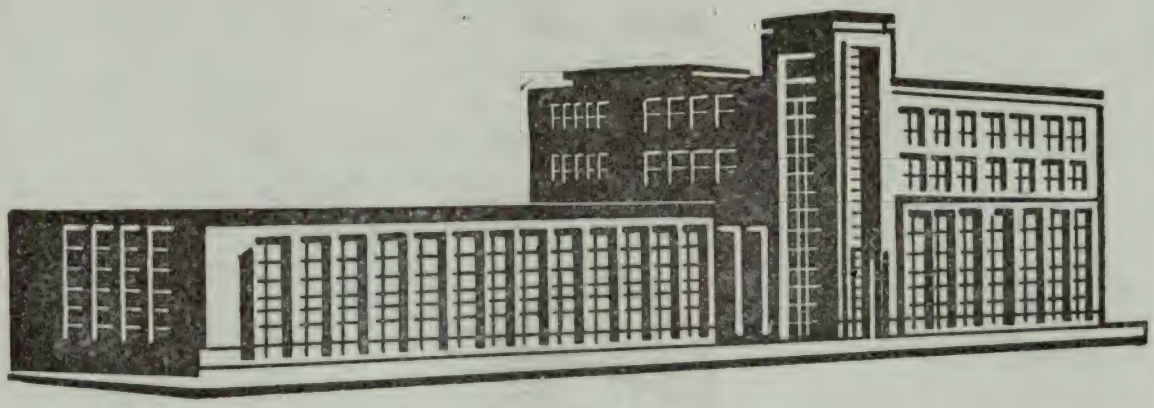
MODELO M B 841 B	25 H. P. — 1.000 R. P. M.
MODELO M 202 B	55 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 203 B	90 H. P. — 1.200 R. P. M.
MODELO M 204 B	120 H. P. — 1.200 R. P. M.

OUTROS MODELOS PARA ENTREGA MUITO RÁPIDA

MOTORES A 4 TEMPOS - ARREFECIMENTO POR ÁGUA
ARRANQUE A AR COMPRIMIDO OU ELÉCTRICO

REPRESENTANTES C. SANTOS LDA. — DIVISÃO MARÍTIMA E INDUSTRIAL

29, AV. DA LIBERDADE, 41 — LISBOA
160, R. DE S.TA CATARINA, 168 — PORTO



Standard Electrica S.A.R.L.

Associada da

INTERNATIONAL TELEPHONE AND TELEGRAPH CORPORATION

DE NOVA YORK

TELECOMUNICAÇÕES

ELECTRÓNICA

AV. DA INDIA — LISBOA

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

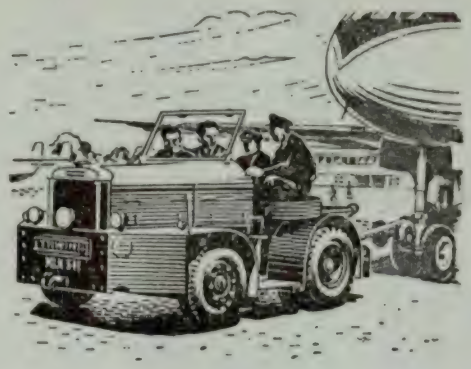
✱

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✱

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 47812-50129
LISBOA



MERCURY

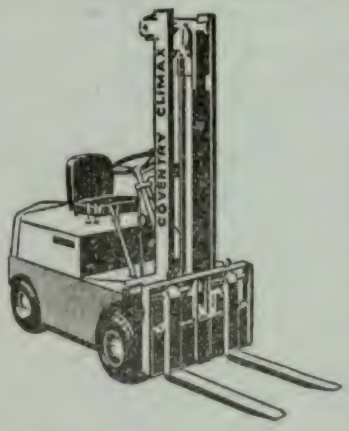
TRACTORES INDUSTRIAIS

Capacidades de reboque
até 300 Ton

COLES

GUINDASTES MÓVEIS

Capacidades até 60 Ton



Coventry Climax

EMPILHADORES

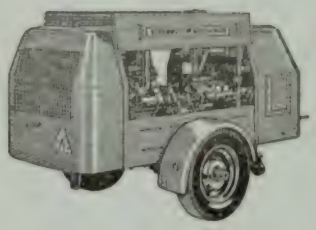
ELÉCTRICOS DIESEL GASOLINA

Capacidades até 3 Ton

"BROOMWADE"

COMPRESSORES

PORTÁTEIS E FIXOS
ROTATIVOS E ALTERNATIVOS
E FERRAMENTAS PNEUMÁTICAS



GUEDES & ALMEIDA, LDA. • R. S. Nicolau, 71-4.º — Tel. 32 50 80 • LISBOA 2

Celulite

ISOLAMENTO TÉRMICO DAS CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. ✦ RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º ✦ TEL. 73 01 56 — LISBOA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA

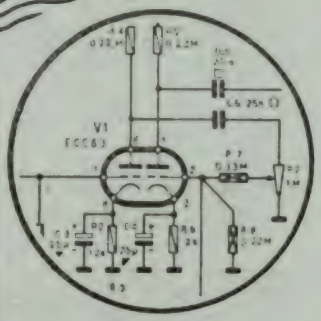
TELEF. 73 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

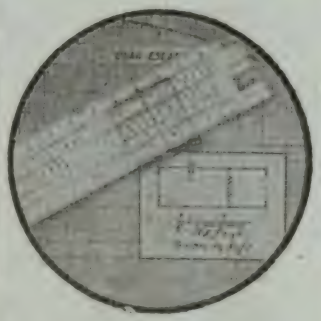
EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
IMEPA
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º-LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

EQUIPAMENTO DE AMPLIFICAÇÃO DE SOM

BEM CONCEBIDO
BEM CALCULADO
CONSTRUIDO





LESA

A grande marca italiana

Representantes em Portugal

TELECTRA

EMPRESA TÉCNICA DE EQUIPAMENTOS ELÉCTRICOS, S. A. R. L.

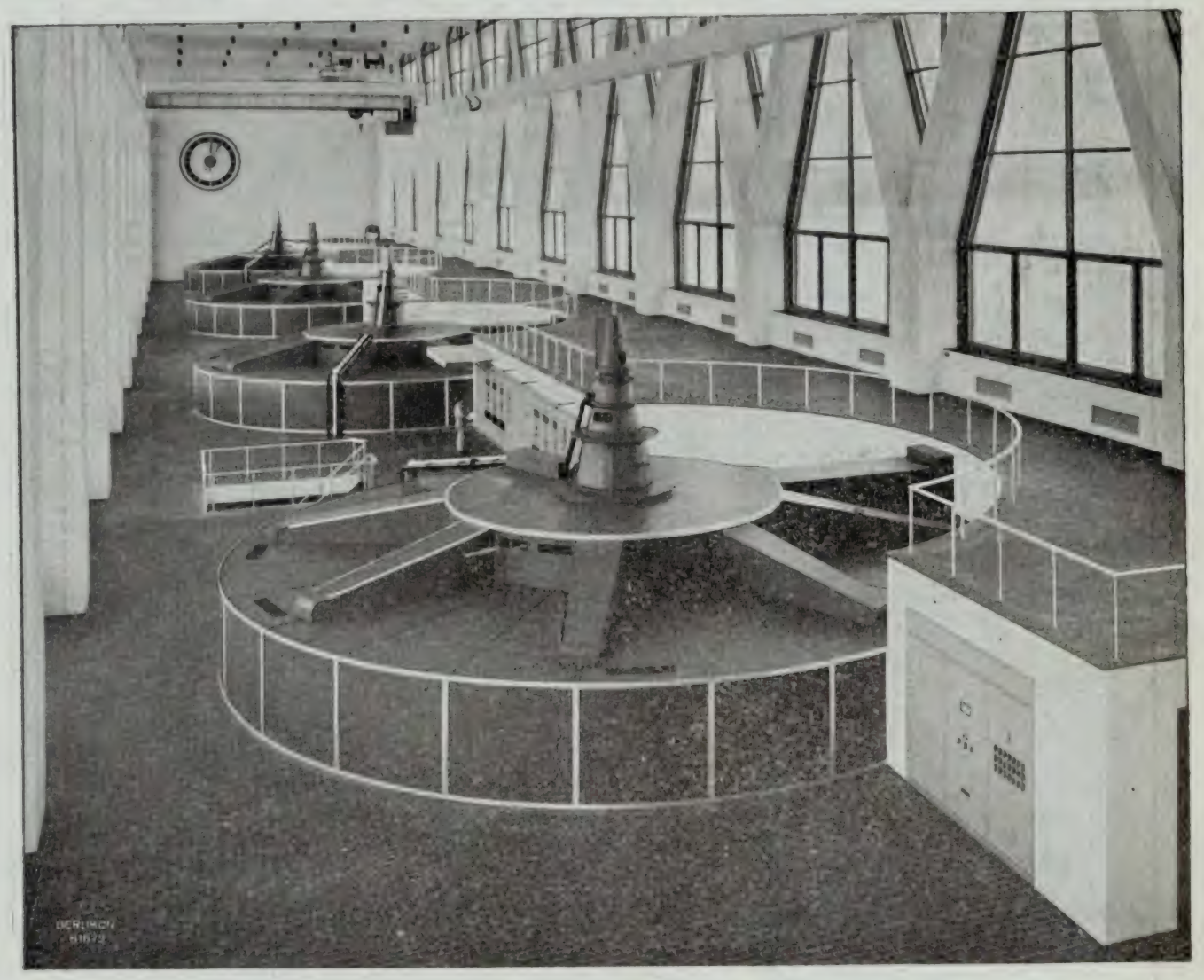
Rua Rodrigo da Fonseca, 103, r/c
LISBOA — Tel. 68 60 72

Rua Sá da Bandeira, 766-1.º E.
Tel. 2 48 18 — PORTO

Ateliers de Construction Oerlikon—Zurich 50

Alternadores accionados por turbinas hidráulicas, para todas as potências e condições de exploração, pequenas e grandes velocidades

Central hidroeléctrica de Birsfelden (Suíça), sobre o Reno. Alternadores de 26.000 kVA, cada um, 6.600 V, 68 rot/min, 50 Hz. Diâmetro: 14 metros



Representante para Portugal e Ultramar: **Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda.**

PORTO — P. da Liberdade, 114 LISBOA — Av. Marquês de Tomar, 94

TÉCNICA

CORPO REDATORIAL: J. M. VIEGAS GONÇALVES, A. ROMÃO DIAS, J. F. GOMES DE FINA, A. M. L. ESTEVES BRINCA

Ano XXXVIII — N.º 325 Fevereiro de 1963

SAUDAÇÃO*

J. N. FERREIRA DIAS J.OR
Professor do I. S. T.

Passou meio século sobre a fundação do Instituto Superior Técnico. Não pertenci aos primeiros cursos que o frequentaram e já não ouvi as aulas dadas em francês por alguns professores estrangeiros, enquanto não aprendiam a nossa língua em termos de se fazerem entender.

Matriculei-me em 1918, mas ainda senti o quadro das primeiras horas. Andei pelos bancos dos velhos edifícios do Conde Barão; ainda tive como director o Prof. Bensaúde, inspirador da criação do Instituto; ainda tive Tomás Bordalo Pinheiro como professor de Desenho; ainda obedeci à figura patriarcal do Tavares, chefe do pessoal menor. E ao dizer que obedeci, faço-o sem afectação, com a mais perfeita humildade; hoje, certa mocidade da vanguarda acha impróprio obedecer a alguém.

Vi ainda, sobre o pano de fundo dos barracões de chapa ondulada, coisas que já não se podem tornar a ver: a gravata branca do Prof. Mira Fernandes, a barba mefistofélica do Prof. Lepierre, a farda do general Ferrugento Gonçalves. Ouvi ainda, nas velhas aulas desconfortáveis, sons que já não se podem ouvir: o português afrancesado do Prof. Fesch, as palavras em surdina, macias como um zéfiro, do Prof. Santos Viegas, a voz de clarim do severo mas gentil Prof. Borges Sequeira, que dava notas negativas e concedia aos alunos, depois da leitura do ponto de exame, «um quarto de hora para adoecerem».

E recordo algumas das tropelias que fiz: misturava batatas com os modelos de cristalografia (os «batatoides») nas aulas práticas de Mineralogia; dava saltos de barreira sobre a mesa do mestre, na aula onde ensinavam os Prof. Droz e Adrião Sequeira, aos quais peço desculpa do desacato; de parceria com o Mariz Simões, algumas vezes resolvi pontos de exame de Electricidade a troco de paus de chocolate (1).

Mas este comércio e estes cometimentos desportivos, talvez irregulares, fazíamo-los, eu e os do meu tempo, com a irreverência que a idade pede e desculpa; mas fazíamo-los com o coração puro, sem aceitarmos tráfego com ideias de desrespeito às autoridades, à escola ou à Nação. Eram princípios que não discutíamos; eramos apenas rapazes que brincavam — e que também estudavam.

* * *

O Instituto Superior Técnico nasceu numa hora oportuna, porque tem sido, através dos seus diplomados, um elemento de primeira linha no desenvolvimento económico nacional.

---

(1) Depois de escritas estas palavras, morreu o Prof. Droz; curvo-me perante a sua memória.

* Destinava-se esta «Saudação» à abertura do novo número especial comemorativo do cinquentenário do Instituto Superior Técnico. Devido às perturbações então havidas na vida associativa, tal edição não foi possível, nem seria, de momento, oportuna.

Quando, à volta de 1930, a frequência de alguns cursos caiu a números digitos, porque as actividades portuguesas não absorviam todos os diplomados, muitos responsáveis acharam que a escola tinha especializações a mais para o nível do País, e poucos reflectiram que era o País que tinha desenvolvimento a menos para as necessidades da época.

Afinal, venceram estes; está á vista a prova de que seguiam no bom caminho. Mais do que isso, verifica-se que, se a escola não cumpre, é apenas porque fornece ao País diplomados a menos.

A carência de técnicos para satisfazer as necessidades crescentes da Metrópole e Ultramar cria já hoje numerosas dificuldades; dentro de algum tempo criará impossibilidades. Este é o problema mais grave que a premência do crescimento nacional põe à reflexão das escolas de todos os graus e de todos os ramos; é preciso que elas encontrem maneira de intensificar a formação das novas gerações e de permitir mais largamente o acesso ao ensino superior de todos aqueles que nos graus mais baixos se revelem prometedores.

Com ressalva da sua parcela de responsabilidade nesta rarefacção de profissionais, o Instituto Superior Técnico merece — e com ele todas as escolas — o reconhecimento nacional pelo saber que difunde. O empirismo e o autodidactismo estão em decadência; cada vez é mais importante o papel do ensino na formação dos dirigentes; cada vez são precisos mais dirigentes em cada actividade; cada vez é preciso criar mais actividades.

É-me grato reconhecer à minha escola a posição de órgão-chave nesta progressão ràpidamente crescente.

C. D. U. 517.513:512.831

Formas Matriciais em Problemas de Extremos

POR A. GOUVÊA PORTELA
PROF. DO I. S. T.

0 — Introdução

Seja $u = u\ (x^1, \ldots x^n)$, uma função contínua derivável até à ordem s qualquer, em relação às variáveis $x^1 \ldots . x^n$ numa dada região do espaço em torno de um Ponto P dado. As variáveis $x^1 \ldots . x^n$ são medidas num referencial ortogonal.

Admitamos que o desenvolvimento em série de Taylor é possível e que se pode escrever:

$$u\ (\ldots ., x^i + \partial x^i, \ldots .) - u\ (\ldots ., x^i, \ldots .) = \Delta u + \frac{1}{2!} \Delta^2 u + \frac{1}{3!} \Delta^3 u + \ldots .$$

Sendo:

1) $$\Delta u = \underset{(1,n)}{[u_i]} \cdot \underset{(n,1)}{[\partial x^i]} \qquad \text{com} \begin{cases} i = 1, \ldots . n \\ u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x^2} \end{cases}$$

2) $$\Delta^2 u = \underset{(1,n)}{[\partial x^i]} \cdot \underset{(n,n)}{[u_{ij}]} \cdot \underset{(n,1)}{[\partial x^i]} \qquad \text{com} \begin{cases} i, j = 1 \ldots . n \\ u_{ij} = \dfrac{\partial u}{\partial x^i\, \partial x^j} \end{cases}$$

3) $$\Delta^3 u = \underbrace{\Big\{ \underset{(1,n)}{[\partial x^j]} \cdot \underset{(n,n)}{[u_{ijk}]} \cdot \underset{(n,1)}{[\partial x^i]} \Big\}}_{(1,n)} \cdot \underbrace{[\partial x^k]}_{(n,1} \qquad \text{com} \begin{cases} i, j, k = 1 \ldots . n \\ u_{i,j,k} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^i\, \partial x^j\, \partial x^k} \end{cases}$$

4) $$\Delta^4 u = \underbrace{[\partial x^l]}_{(1,n)} \underbrace{\Big\{ \underset{(1,n)}{[\partial x^j]} \cdot \underset{(n,n)}{[u_{ijkl}]} \cdot \underset{(n,1)}{[\partial x^i]} \Big\}}_{n,n)} \cdot \underset{(n,1)}{[\partial x_k]} \qquad \text{com} \begin{cases} i, j, k, l = 1, \ldots ., n \\ u_{i,j,k,l} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^i\, \partial x^j\, \partial x^k\, \partial x^l} \end{cases}$$

Tem interesse em substituir as formas 3), 4), etc., por outras que sejam mais fáceis ao tratamento matricial e a apresentação destas novas formas constitui o objectivo do presente artigo

I — Formas Δ^3 e Δ^4

As formas Δ^1 e Δ^2 estão perfeitamente adaptadas ao tratamento matricial, por isso começaremos por tratar as formas Δ^3 e Δ^4 e no capítulo seguinte efectuaremos a sua generalização.

1,1) $\Delta^3 U$ pode escrever-se ainda sob a seguinte forma:

$$\Delta^3 U = \underset{(1,n)}{[\partial x^j]} \cdot \underset{(n,n^2)}{[\overline{U}_{ijk}]} \cdot \underset{(n^2,1)}{[\partial x^j \cdot \partial x^k]}$$

Sendo $$\Big[\ \overline{U}_{ijk}\ \Big] = \Big[\underset{(n,n^2)}{[U_{ij1}], [U_{ij2}], \ldots, [U_{ij} \cdot n]}\Big]$$

e
$$[\partial x^j \, \partial x^k] = \begin{bmatrix} \partial x^1 \,.\, \partial x \\ \vdots \quad \vdots \\ \partial x^1 \,.\, \partial x^n \\ \partial x^2 \quad \partial x^1 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \partial x^n \quad \partial x^n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} n \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix} \qquad n \times n = n^2$$

Isto é, $[U_{ijk}]$ é uma matriz rectangular com n linhas e n^2 colunas.
e $[\partial x^j \, \partial x^k]$ é um vector coluna com n^2 linhas com elementos que resultam do produto de dois deslocamentos $(\partial x^j \,.\, \partial x^k)$.

1,2) $\Delta^4 U$ pode escrever-se sob a forma seguinte:

$$\Delta^4 U = \underset{(1\,,\,n^2)}{[\partial x^l \,.\, \partial x^j]} \,.\, \underset{(n^2\,,\,n^2)}{[U_{ij\,.\,kl}]} \,.\, \underset{(n\,,\,1)}{[\partial x^i \,.\, \partial x^k]}$$

Sendo:

$$[\bar{U}_{ij\,.\,kl}] = \underset{(n^2\,,\,n^2)}{\begin{bmatrix} [U_{ij\,11}] \,.\,.\,.\,.\,.\, [U_{ij\,1n}] \\ \vdots \\ [U_{ij\,n1}] \,.\,.\,.\,.\, [U_{ij\,nn}] \end{bmatrix}}$$

isto é, $[U_{ij\,,\,kl}]$ é uma matriz quadrada de n^2 linhas e n^2 colunas.

Tanto a forma 1,1) como 1,2) são fáceis de verificar por simples efectivação das operações indicadas.

II) Generalização

É imediata a generalização para derivadas da ordem par 2 r ou ímpar 2 r+1 sendo r = 0, ... n

2,1) *Formas pares* Δ^{2r} u

$$\Delta^{2r} u = \underset{(1,\,n^r)}{\left[\prod_1^r \partial x^i\right]^t} \,.\, \underset{(n^r\,,\,n^r)}{\left[\overbrace{u_j \,.\,.\,.\,.\, q}^{2^r}\right]} \,.\, \underset{(n^r\,,\,1)}{\left[\prod_1^r \partial x^i\right]}$$

Sendo:

$$\overbrace{u_j \,.\,.\,.\,.\, q}^{2^r} = \frac{\partial^{2r} u}{\underbrace{\partial x^j \,.\,.\,.\,.\, \partial x^q}_{2\,r}}$$

e

$$\underset{(1,\,n^r)}{\left[\prod_1^r \partial x^i\right]} = \left.\begin{bmatrix} \partial x^1 \,.\,.\,.\,.\, \partial x^1 \,.\, \partial x^1 \\ \vdots \,.\,.\,.\,.\,.\

A matriz $\underset{(u^r,\, n^r)}{[U_{j\,\ldots\,q}]}$ toma a forma seguinte:

$$
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc}
\overbrace{\begin{array}{cc} \overbrace{U_{11\ldots 11}}^{2r} & \overbrace{U_{11\ldots 1n}}^{2r} \\ \vdots & \vdots \\ U_{11\ldots n1} & U_{11\ldots nn} \end{array}}^{n} \Big\}\, n & \overbrace{\begin{array}{ccc} U_{11\ldots 1n\ldots 11} & \cdots & U_{11\ldots 1n\ldots 1n} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{11\ldots 1n\ldots n1} & \cdots & U_{11\ldots 1n\ldots nn} \end{array}}^{n} \Big\}\, n & \overbrace{\begin{array}{ccc} U_{1n\ldots 1n\ldots 11} & \cdots & U_{1n\ldots 1n\ldots 1n} \\ \vdots & & \\ U_{1n\ldots 1n\ldots n1} & \cdots & U_{1n\ldots 1n\ldots nn} \end{array}}^{n} \Big\}\, n \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\underbrace{\begin{array}{cc} U_{n1\ldots n1} & U_{n1\ldots 1n} \\ \vdots & \\ U_{n1\ldots n1} & U_{n1\ldots nn} \end{array}}_{n} \Big\}\, n & \underbrace{\begin{array}{ccc} U_{n1\ldots nn\ldots 11} & \cdots & U_{n1\ldots nn\ldots 1n} \\ \vdots & & \\ U_{n1\ldots nn\ldots n1} & & U_{n2\ldots nn\ldots nn} \end{array}}_{n} \Big\}\, n & \underbrace{\begin{array}{ccc} U_{nn\ldots nn\ldots 11} & & U_{nn\ldots nn\ldots 1n} \\ \vdots & & \\ U_{nn\ldots nn\ldots n1} & & U_{un\ldots nn\ldots nn} \end{array}}_{n}
\end{array}\right]}_{n^r} \Big\}\, n^r
$$

2,2) *Formas ímpares* $\Delta^{2r+1}\, u$

$$
\Delta^{2r+1}\, u = \underset{(1,\, n^r)}{\left[\overset{r}{\underset{1}{\pi}}\, \partial x^i\right]^t} \cdot \underset{(n^r,\, n^{r+1})}{\left[\overbrace{u_{i\ldots q}}^{2r+1}\right]} \cdot \underset{(n^{r+1},\, 1)}{\left[\overset{2r+1}{\underset{1}{\pi}}\, \partial x^i\right]}
$$

Sendo $\quad \overbrace{u_{i\ldots q}}^{2r+1} = \dfrac{\partial^{2r+1}\, u}{\underbrace{\partial x^i \ldots \partial x^q}_{2r+1}}$

A matriz rectangular $\underset{(n^r,\, n^{r+1})}{[u_{i\ldots q}]}$ toma a forma explícita seguinte:

$$
\overbrace{\left[\begin{array}{ccccc}
\underbrace{\begin{array}{cc} \overbrace{u_{1,11\ldots 11}}^{2r+1} & \overbrace{u_{1,1n\ldots 1n}}^{2r+1} \\ \vdots & \\ u_{1,11\ldots 1n} & u_{1,1n\ldots nn} \end{array}}_{n^r} \Big\}\, n & \Big\}\, n^r & \cdots\cdots & \Big\}\, n^r & \underbrace{\begin{array}{cc} u_{n,11\ldots 11} & u_{n,1n\ldots 1n} \\ & \\ u_{n,11\ldots n1} & u_{n,1n\ldots nn} \end{array}}_{n_r} \\
\vdots & & & & \\
\underbrace{\begin{array}{cc} u_{1,n1\ldots 11} & u_{1,nn\ldots 1n} \\ \vdots & \\ u_{1,nn\ldots n1} & u_{1,nn\ldots nn} \end{array}}_{n^r} \Big\}\, n & \Big\}\, n^r & \cdots\cdots & \Big\}\, n^r & \begin{array}{cc} u_{n\,n1\ldots 11} & u_{n\,nn\ldots 1n} \\ \vdots & \\ u_{n\,nn\ldots n1} & u_{n\,nn\ldots nn} \end{array}
\end{array}\right]}^{n^{r+1}} \Big\}\, n^r
$$

3) *Aplicação das formas referidas em 2)*

Tem interesse aplicar as formas atrás apresentadas a casos particulares.
O mais simples corresponde a $n = 2$.

$$r = 0) \quad \Delta u = [u_1, u_2] \begin{bmatrix} \partial x^1 \\ \partial x^2 \end{bmatrix} = u_1 dx^1 + u_2 dx^2 = \sum_{i=1}^{2} u_i \partial x^i$$

$$r = 1) \quad \Delta^2 u = [\partial x^1, \partial x^2] \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial x^1 \\ \partial x^2 \end{bmatrix} = \sum_{i\,j=1}^{2} u_{ij} \partial x^i \partial x^j$$

$$\Delta^3 u = [\partial x^1, \partial x^2] \cdot \begin{bmatrix} u_{111} & u_{112} & u_{211} & u_{212} \\ u_{121} & u_{122} & u_{221} & u_{222} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial x^1 \partial x^1 \\ \partial x^1 \partial x^2 \\ \partial x^2 \partial x^1 \\ \partial x^2 \partial x^2 \end{bmatrix} = \sum u_{ijk} \partial x^i \partial x^j \partial x^k$$

$$r = 2) \quad \Delta^4 u = [\partial x^1 \partial x^1, \partial x^1 \partial x^2, \partial x^2 \partial x^1, \partial x^2 \partial x^2] \cdot \begin{bmatrix} u_{1111} & u_{1112} & \vdots & u_{1211} & u_{1212} \\ u_{1121} & u_{1122} & \vdots & u_{1221} & u_{1222} \\ u_{2111} & u_{2112} & \vdots & u_{2211} & u_{2212} \\ u_{2121} & u_{2122} & \vdots & u_{2221} & u_{2222} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial x^1 \partial x^1 \\ \partial x^1 \partial x^2 \\ \partial x^2 \partial x^1 \\ \partial x^2 \partial x^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{ijkl} u_{ijkl} \cdot \partial x^i \partial x^j \partial x^k \partial x^l$$

4) *Condição suficiente para que uma forma par seja definida positiva (ou negativa) ou semidefinida positiva (ou negativa)*

Seja dada uma forma par:

$$\Delta^{2r} u = \underset{(1, n^r)}{\left[\overset{r}{\underset{1}{\pi}} \partial x^i \right]^t} \cdot \underset{(n^r, n^r)}{\left[u_j \ldots q \right]} \cdot \underset{(n^r, 1)}{\left[\overset{r}{\underset{1}{\pi}} \partial x^i \right]}$$

Como a matriz $\underset{(n^r, n^r)}{[u_j \ldots q]}$ é simétrica por construção, é sempre possível encontrar uma matriz ortogonal $T(n^r, n^r)$ tal que:

$$\begin{cases} T \cdot T^t = E \quad \text{Sendo } E \text{ uma matriz unidade.} \\ \underset{(n^r, n^r)}{T} \cdot \underset{(n^r, n^r)}{[u_j \ldots q]} \cdot \underset{(n^r, n^r)}{T^t} = \underset{(n^r, n^r)}{[D]} = \underset{(n^r, n^r)}{[D_{ii}]} \end{cases}$$

Sendo D uma matriz *diagonal*.
Então será:

$$\Delta^{2r} u = \left[\overset{r}{\underset{1}{\pi}} \partial x^i \right]^t \cdot \underbrace{T^t \cdot T}_{=1} \left[U_j \ldots q \right] \cdot \underbrace{T^t \cdot T}_{=1} \cdot \left[\overset{r}{\underset{1}{\pi}} \partial x^i \right]$$

Se designarmos por π^i ao elemento da linha i do vector $\left[\overset{r}{\underset{1}{\pi}} \partial x^i \right]$

e por α_i^j um elemento da matriz T

Será ainda

$$\Delta^{2r} U = \left[\sum_i \pi^i \alpha_i^j \right]^t . T \left[U_j .. q \right] . T^t . \left[\sum_i \pi^i \alpha^i \right]$$

$$= \underset{(1, n^r)}{\left[\sum_i \pi^i \alpha_i^j \right]^t} . \underset{(n^r, n^r)}{\left[D \right]} . \underset{(n^r, 1)}{\left[\sum_i \pi^i \alpha_i^j \right]}$$

$$= \sum_j D_{jj} . \left(\sum_i \pi^i \alpha_i^j \right)^2$$

$$= \sum_j D_{jj} . \left(\sum_i \left(\pi_1^r \partial x^l \right)^i \alpha_i^j \right)^2$$

e para que $\Delta^{2r} U$ seja positivo (ou negativo) qualquer que sejam ∂x^l terá de ser $D_{jj} > 0$ $(j = 1, \ldots n^r)$, porque o segundo factor $\left(\sum_i \left(\pi_2^r \partial x^l \right)^i \alpha_j^i \right)^2$ é sempre positivo (para nem todos os ∂x^l nulos) por estar elevado ao quadrado.

Se $D_{jj} \geqslant 0$ (ou $\leqslant 0$) a positividade (ou negatividade) será semidefinido.

Se $D_{jj} > 0$ (ou < 0) a positividade (ou negatividade) será definida.

Está assim generalizado às formas pares superiores à quadradada, as condições suficientes de positividade ou (negatividade).

O interesse da forma é evidente, uma vez que a diagonalização de uma matriz mesmo para ordem de $100 \sim 200$ é empresa fácil com os calculadores modernos.

Assim para $u = 4$ e $r = 3$ a ordem de $\Delta^{2r} u$ é $n^r = 4^3 = 64$.

Dificilmente a estacionaridade e estabilidade de uma função da física ou da engenharia se decide na derivada $2 \times r = 6$.ª

Nota: porque a matriz $[u_j \ldots q]$ é simétrica, a hipótese de os D_{jj} poderem ser positivos e negativos é impossível.

Com efeito é fácil de demonstrar que as matrizes simétricas são semidenidasfi ou definidas mas nunca indefinidas.

Se a matriz $[u_j \ldots q]$ não estiver numa forma simétrica, poderá proceder-se à sua diagonalização e se os $D_{jj} \geqslant 0$ (ou $\leqslant 0$) então trata-se duma forma simétrica.

Se tal não se verificar, ou a função u não é contínua ou o referencial não é ortogonal ou simplesmente se cometeu um erro na operação da diagonalização.

SUMÁRIO

Formas matriciais de ordem superior à 2.ª e sua utilização em problemas de extremos. Estabelecimento de condições de suficiência.

SUMMARY

Matricial forms with orders above the second and utilisation in problems of extremes. Establissement of suficient conditions.

C. D. U. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.)

NOTA: *As produções e os consumos das empresas do R. N. C. representam cerca de 94 % dos totais do País.*

I — Breve nota mensal

No aspecto hidrológico, o mês de Janeiro apresentou-se, no conjunto, muito acima da média. Efectuou-se uma exportação para Espanha de excedentes de energia da rede portuguesa. Os diagramas semanais de fornecimento são acordados entre o R. N. C. e a UNESA.

II — Elementos gerais (GWh)

a) Mensais

	1962	1963	Variação %
Produção hidráulica (P_h) . . .	322,8	375,9	+ 17
Produção térmica (P_t)	0,0	5,8	—
Produção total (P_T)	322,3	381,7	+ 18
Exportações (Ex)	0,0	16,8	—
Importações (I)	0,0	0,0	0
Produção para consumos não perman. (P_{cnp}) (1)	60,3	59,7	— 1
Produção para consumos permanentes (P_{cp}) (2)	262,0	305,2	+16,5 (3)
Coeficiente de hidraulicidade	1,51	1,59	—

NOTAS:

(1) Consideram-se consumes não permanentes os indicados em 4.º.

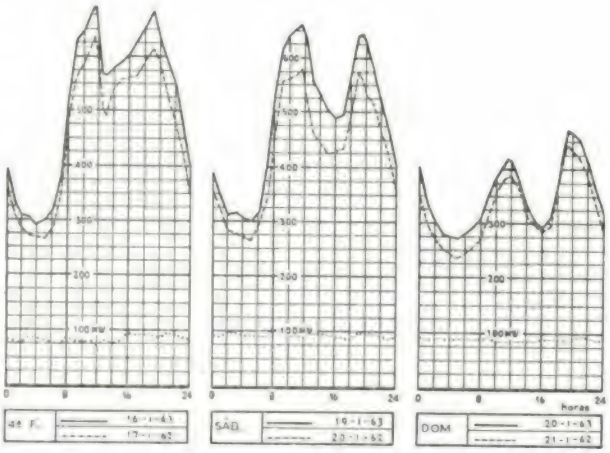
(2) A produção para consumos permanentes (P_{CP}) é determinada pela seguinte expressão: $P_{CP} = P_T - P_{cnp} + I - E_X$

(3) O aumento percentual de produção para consumos permanentes, tendo em conta a incidência dos domingos e dias especiais, é respectivamente de 13,7 %.

III — Diagramas de carga dos dias característicos

				4.ª feira: 17-1-62	4.ª feira: 16-1-63
Produção hidráulica			(P_h) MWh	11367	12503
Produção térmica			(P_t) MWh	0	0
Produção total			(P_T) MWh	11467	12503
Trocas com Espanha	Export.		(Ex) MWh	0	0
	Import.		(I) MWh	0	0
Total $P_T + (I - Ex)$			MWh	11367	12503
Prod. para cons. perm.			(P_{cp}) MWh	9458	10610
Prod. para cons. não perm.			(P_{cnp}) MWh	1909	1893
Características dos diagramas	$P_T + (I - Ex)$	Potência máx.	MW	638,5	682
		Potência mín.	MW	268,0	292
		Utiliz. da ponta	horas	17,8	18,1
		Factor de carga		0,74	0,75
	P_{cp}	Potência máx.	MW	556	617
		Potência mín.	MW	184	208
		Utiliz. da ponta	horas	17,0	17,2
		Factor de carga		0,71	0,72

JANEIRO



IV — Energia armazenada nas principais albufeiras

Albufeiras:	No fim do mês GWh	No fim do mês % (1)
Paradela	99,6	44,8
Venda Nova	98,1	76,6
Salamonde	26,3	95,3
Caniçada	31,6	95,5
Cabril :	307,1	90,5
Castelo do Bode	149,6	91,8
Guilhofrei	4,1	49,4
Lagoa Comprida	24,3 (2)	73,8
Santa Luzia	52,3	84,9
Pracana	12,8	99,2
Póvoa	12,7 (3)	96,2
Total . . .	818,5	78,5

Notas:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

(2) Inclui 2,6 GWh armazenados em Vale do Rossim no fim do mês.

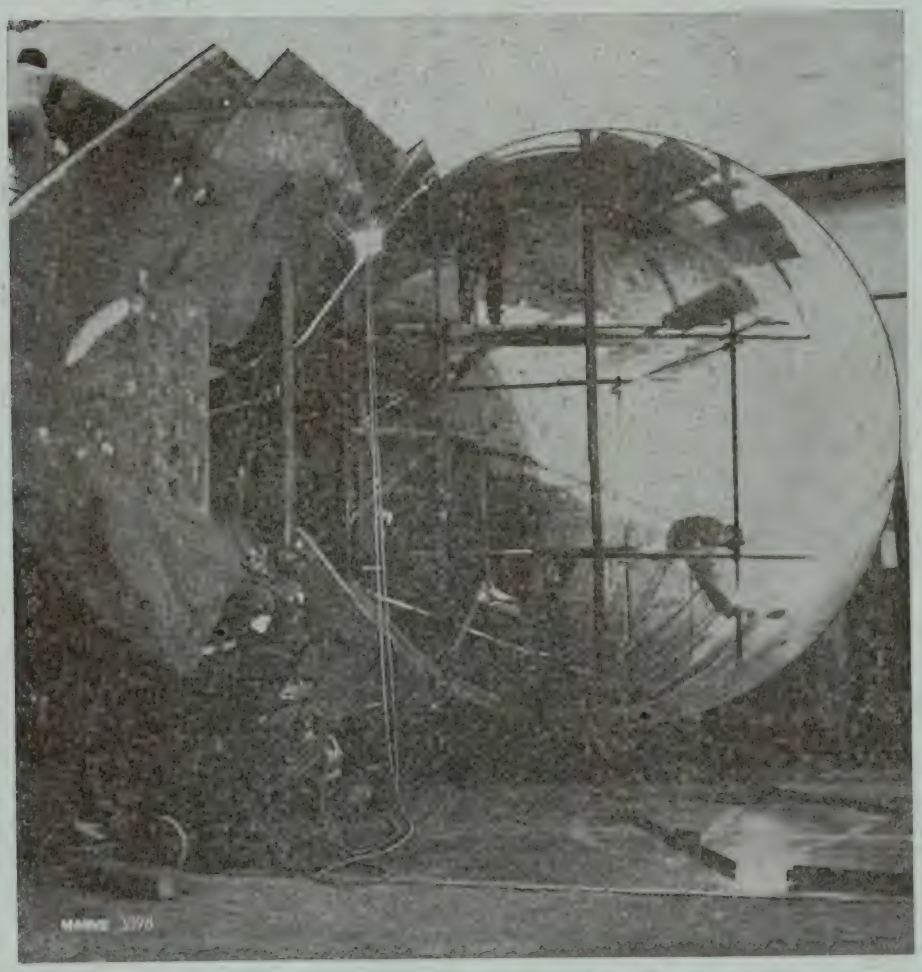
(3) Inclui 2,7 GWh armazenados no açude do Poio no fim do mês.

MAGUE

CONSTRUÇÕES METALO-MECÂNICAS MAGUE, L.DA

(S. E. MONIZ DA MAIA & VAZ GUEDES, L.DA)

Alverca — Portugal



Aspecto da maquinagem do ante-distribuidor de uma das 3 turbinas «Francis» de 120.000 CV destinadas à Central de Bemposta, construídas por Construções Metalomecânicas «MAGUE», S. A. R. L., segundo projecto e licença dos Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey, S. A.

•

PROJECTO E FABRICO DE

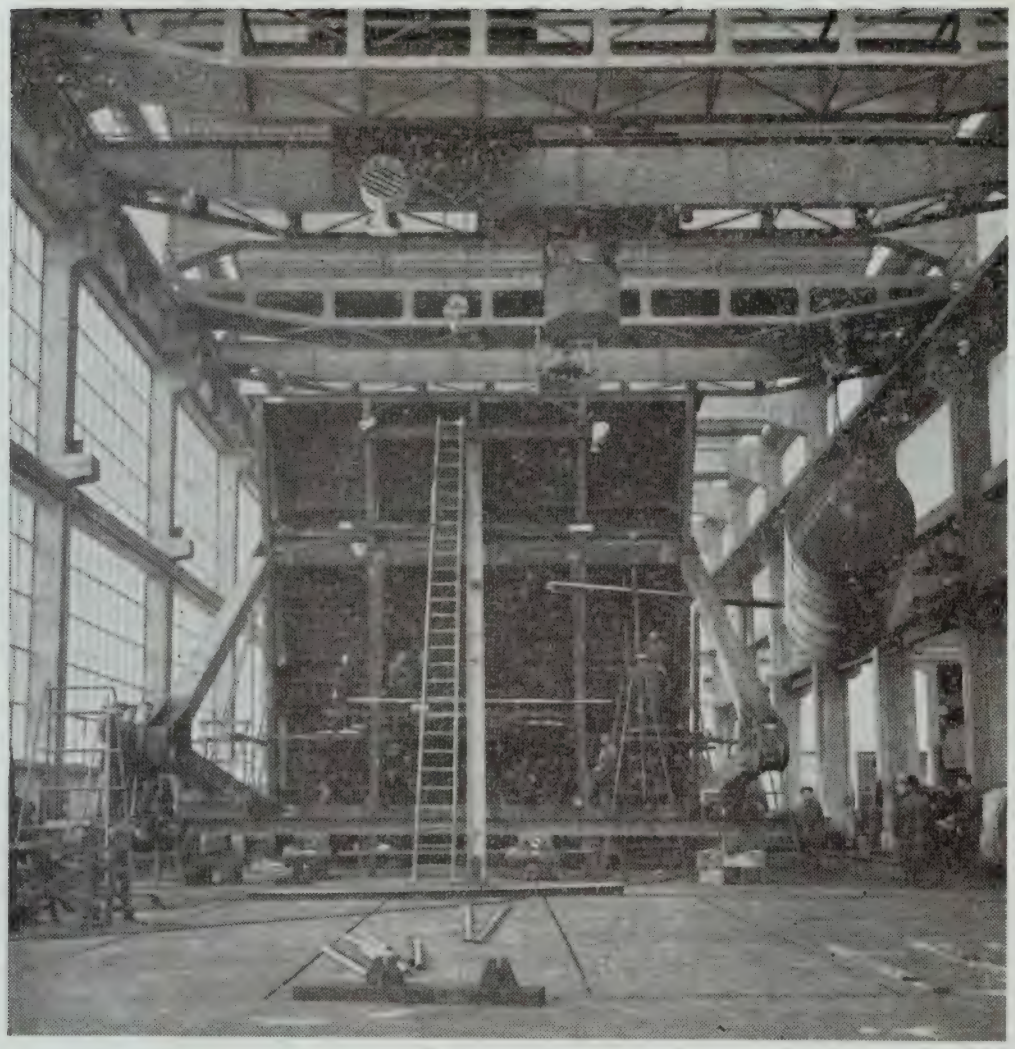
PONTES ROLANTES

GUINDASTES

GRUAS, DERRICKS E GUINCHOS

APARELHOS DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS

CONSTRUÇÕES METÁLICAS PESADAS



PRÉ-MONTAGEM DE UMA COMPORTA E DE UM RESERVATÓRIO NA OFICINA DE CONSTRUÇÕES METÁLICAS

AÇOS VAZADOS AO CARBONO, MANGANÊS, CRÓMIO E INOXIDÁVEIS
FERROS FUNDIDOS
MECÂNICA MÉDIA E PESADA
CONSTRUÇÕES METÁLICAS

comportas
turbinas
condutas forçadas
reservatórios sob pressão
permutadores de calor — (Licença KELLOGG)

REDUTORES DE VELOCIDADE

DIVISÃO METALO-MECÂNICA

COMPANHIA UNIÃO FABRIL

AV. 24 DE JULHO, 170 — LISBOA 2 — TELEFONES 67 04 21 E 67 20 61 — TELEGRAMAS: METALOFABRIL

C. D. U. 553.76 (469)

Água fortemente radioactiva do Sul de Portugal Continental*

A. HERCULANO DE CARVALHO
C. MOURA PULIDO

(Centro de Química — I. S. T. — C. E. E. N. do Instituto de Alta Cultura)

Numa nota publicada há cerca de 6 anos (1), um de nós tentou dar um panorama geral da riqueza radioactiva das nossas águas minero-medicinais, tal como é conhecida através de trabalhos, próprios e alheios, trabalhos que, no departamento hidrológico do património nacional são, felizmente, bastante numerosos, abrangendo quase todas as nascentes de água mineral conhecidas no nosso território metropolitano.

Uma das afirmações aí feitas era a de que todas as águas fortemente radioactivas (tomando arbitràriamente como limite inferior o teor de radão de 20 mμC/l) se situavam a norte do Mondego. Verificava-se também que uma radioactividade elevada das águas nem sempre estava ligada à existência, na região da nascente, de jazigos de minério radioactivo, isto é, que havia águas brotando fora das zonas uraníferas de Portugal Continental que apresentavam teor apreciável de radão (por exemplo, Estoril e Cucos). Pelo contrário, todas as águas minerais surdindo nessas zonas se mostram radioactivas.

Os valores mais altos da concentração de radão, conhecidos até então, situavam-se precisamente na região uranífera da Beira Alta, atingindo o nível de 50 - 60 mμC/l nas águas de Abrunhosa e S. Gemil, segundo as determinações de Egas Pinto Basto e A. Viana de Lemos (2).

(1) A. Herculano de Carvalho. «Informação sobre radioactividade das águas minerais portuguesas», Rev. Quím. Pura Apl., *36*, 206, (1956).

(2) «Determinações de Radioactividade em Águas Minerais» — Rev. da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra — Vol. VI, 1 e 3 (1936-37).

Apenas uma única nascente mostrou, aos mesmos Autores, uma cota mais elevada e verdadeiramente excepcional: 179 mμC/l.

Trata-se duma nascente, já assinalada e analisada por Lepierre, denominada «Urgeiriça» (1), situada a cerca de 300 m a sul do jazigo de urânio da mina do mesmo nome mas que, apesar de ter sido concessionada (1922) e duas vezes transmitida por alvará (1933 e 1948), nunca esteve em exploração.

Não eram pois conhecidas, ao sul do Mondego, nascentes de água mineral com tão elevadas cotas de teor de radão.

Recentemente, a convite da Câmara Municipal de Nisa, houve que proceder a análise duma água que nasce a cerca de 9 km daquela vila, e que, apesar de ser conhecida e utilizada, pelo menos desde os princípios do século passado, nunca fora examinada, sabendo-se apenas que era sulfúrea.

As primeiras amostras para a determinação do radão indicaram uma ordem de grandeza muito alta do seu teor, o que aliás já se previa, dada a circunstância da nascente estar situada dentro duma zona em que os Serviços de Prospecção da Junta de Energia Nuclear tinham descoberto — facto inteiramente novo até há pouco, importantes jazidas de minérios de urânio. Supúnhamos, no entanto, encontrar um terço ou, quando

(1) O valor indicado para a radioactividade refere-se à nascente «Urgeiriça II», mencionando os Autores citados uma outra: «Urgeiriça I».

* Comunicação apresentada à Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa em 12 de Julho de 1962.

muito, metade do valor que depois foi determinado e, por isso, as medidas não se fizeram em boas condições de precisão, dada a sensibilidade do dispositivo de medida.

Assim, foi necessário voltar ao lugar da nascente, repetir as colheitas e, já em boas condições, as medidas.

A nascente, situada entre a sede do concelho e as povoações de Arez, Tolosa e Gáfete, é conhecida pelo nome de «Fedegosa» ou «Fadagosa». Esta designação, justificada pelo cheiro das águas, é comum a mais três mananciais de água sulfúrea na mesma zona: a de Mação, no distrito de Santarém, e as de Gavião (1) e de Marvão (também chamada Maria Viegas ou Pereiro) ambas no distrito de Portalegre. Os locais das quatro Fedegosas podem situar-se dentro dum rectângulo, de lados paralelos às direcções oeste-leste e norte-sul com as dimensões de 55 e 15 km, respectivamente.

Em «Le Portugal Hydrologique et Climatique» encontra-se uma análise (Lepierre-1932) da Fadagosa de Gavião. A água da Fadagosa de Mação foi resumidamente analisada pelo Dr. Mastbaum e, posteriormente, por um de nós; quanto à água de Maria Viegas, apenas se conhece uma análise muito sumária, de 1891, devida a Santos e Silva.

Como notámos, nada se sabia até agora sobre a composição da água da Fadagosa de Nisa ou de Arez.

A análise mostra tratar-se duma água fria, do tipo bem caracterizado das sulfúreas-alcalinas e portanto hipo-salina, muito fluoretada (10,8 mg/l de F^-), com predominância muito marcada do catião *sódio* e do anião *bicarbonato*.

Tem reacção alcalina (pH = 7,92) e é redutora ($e_{red.} = -0{,}12$ V; $rH_2 = 11{,}8$) (2). A não ser por um teor um pouco mais baixo de sílica, não se distingue das suas congéneres do Centro e Norte do país.

Mas o que verdadeiramente a individualiza é a sua radioactividade. Esta característica, em absoluto, e a circunstância dela se apresentar, pela primeira vez até hoje, numa água do sul de Portugal Continental, justifica a apresentação da presente comunicação.

Há pouco que dizer quanto aos métodos de análise que, quanto às determinações do radão e do rádio, são os habituais no Laboratório do I. S. T., onde trabalham alguns bolseiros do Centro de Química Nuclear do I. A. C.

Na determinação do urânio, usou-se o método muito sensível de separação, por extracção com benzeno e dosagem espectrofotométrica do complexo com «rodamina B», método estudado e desenvolvido neste Centro de Estudos (1).

Os resultados condensam-se na tabela a seguir:

	Por 1 litro	Por 1 g de resíduo	Unidades
Radão (Rn)	84,2	—	mμC
Rádio (Ra)	1	3	x 10^{-10} g
Urânio (U_3O_8)	135,6	410	μg

Vê-se assim que não só o teor de radão é excepcional (o mais alto de todas as nossas águas em exploração) mas ainda que:

a) a concentração de rádio se situa para lá do limite considerado normal (10^{-11});

b) o teor de urânio é o mais alto de que tenho conhecimento em águas naturais portuguesas, cerca de 100 vezes o valor que usualmente se encontra. Sob este aspecto, observa-se que o resíduo da água de Arez poderia considerar-se já como um minério de urânio pobre (cerca de 0,05 % de U_3O_8).

Outras considerações merecem ser feitas, oportunamente, sobre certos aspectos químicos da coexistência destas características numa água natural.

Por agora, queríamos apenas pôr em evidência a raridade do facto, propondo aos médicos e aos geólogos um tema de meditação sobre as suas implicações nos planos que são do âmbito das suas especialidades.

---

(1) Hoje inutilizada por inundação após a construção da barragem de Belver.

(2) Determinações de J. Duarte de Almeida, do Instituto de Hidrologia de Lisboa.

(1) Fraústo da Silva e M. Legrand de Moura — Novo método espectrofotométrico para dosagem do Urânio — Técnica, *26*, 258, (1958).

C. D. U. 536.21.001

Condução do calor em sólidos em regime variável

(Soluções pelo método de separação de variáveis)

PELO ENG.º MEC. JOSÉ JOAQUIM DELGADO DOMINGOS

Assistente do I. S. T.
Bolseiro da OTAN

À importância da condução do calor em sólidos como um dos modos fundamentais da transmissão do calor, junta-se a importância crescente do estudo das tensões em sólidos provenientes de gradientes térmicos. Se sob aquele aspecto as soluções analíticas têm interesse na engenharia, sob este essa importância acentua-se por ser um dado primário do problema. Julga-se por isso de interesse uma sucinta tentativa de correcta definição do problema da condução do calor em sólidos do ponto de vista macroscópico por forma a situar os modelos usualmente utilizados na solução analítica. Como exemplificativo apresenta-se um dos métodos da análise mais conhecidos e utilizados na obtenção de soluções — o método de separação de variáveis. Pensa-se de interesse a apresentação da bibliografia mais importante, bem como a resumida indicação das vantagens e limitações da utilização do método nas aplicações

0 — Introdução

0.1 — O estudo da condução do calor faz-se com toda a generalidade em Termodinâmica Irreversível na qual, sob o ponto de vista macroscópico, se postula a validade das funções termoestáticas relativamente aos valores instantâneos das variáveis e se admite acoplamento entre fluxos e afinidades diferentes. Se o sistema se não encontra muito afastado do equilíbrio termoestático aquele acoplamento pode exprimir-se por relações lineares sob a forma duma matriz de interligação, que é simétrica no caso da inexistência dum campo magnético exterior, e os seus elementos são no caso geral função de todos os potenciais. Além disso, como a soma em cada ponto (1) dos produtos de cada fluxo pela respectiva afinidade é igual a produção da entropia nesse ponto por unidade de tempo devido à irreversibilidade aquela soma é positiva e a matriz é defenida positiva.

Apesar do seu interesse, principalmente quando se trata o estudo de sistemas com acoplamento de fluxos, não é corrente a utilização da Termodinâmica Irreversível no domínio da engenharia e não se encontra nos tratados recentes da literatura ocidental no domínio da transmissão do calor e de massa (2).

0.2 — Não se considerando a existência de acoplamentos de fluxos, a forma clássica de abordar a condução do calor é a partir da equação de Fourier, a qual é, relativamente à condução do calor, o equivalente da lei de Ohm em electricidade.

No contesto da Termodinâmica Irreversível significa que apenas são diferentes de zero os elementos da diagonal principal da matriz, ou seja, que os vários fluxos só dependem das respectivas afinidades e além disso que cada elemento da diagonal é apenas função do respectivo potencial. Tal permite que os vários fluxos e respectivas afinidades sejam estudadas inde-

(1) Entendido no sentido físico, i. e. num elemento de volume macroscòpicamente muito pequeno.

(2) A Termodinâmica Irreversível que é de criação essencialmente europeia, com os trabalhos de Onsager, Prigogine e De Groot, principalmente, é utilizada neste domínio pelos autores orientais, em particular Lykov e Mikhaylov na sua Teoria da Transmissão da Energia e Massa em que a aplicam extensamente no estudo da secagem.

pendentemente dos restantes, e estudar portanto isoladamente a condução do calor (8).

O ponto de vista clássico corresponde a esta simplificação. No entanto, embora isolando a condução do calor e mantendo sempre a ausência de acoplamento de fluxos, a teoria clássica têm-os em conta em certos casos introduzindo no sólido fontes ou poços de calor, ou artifícios equivalentes, pelas quais considera a produção da entropia pela irreversibilidade a elas associada (v. nota n.º 7) (3).

Esta simplificação justifica-se quase sempre nas aplicações porque reduz-se a complexidade do problema o qual do ponto de vista matemático passa a exprimir-se, no caso geral, por um sistema de equações às derivadas parciais independentes em vez de o ser por um sistema de equações simultâneas mais complexas. Òbviamente, considerando apenas a condução, o problema reduz-se a uma só equação às derivadas parciais.

0.3 — Além das simplificações anteriores é usual considerar um sólido homogéneo e isótropo e admitir a constância relativamente à temperatura da constante de proporcionalidade da equação de Fourier. Nessas condições se obtém a conhecida equação às derivadas parciais do tipo parabólico conhecida por equação do calor:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

a qual, como se verifica, corresponde a uma simplificação do modelo físico mais geral que se esboçou.

0.4 — A simplificação que conduz à equação do calor é inevitável em face da complexidade analítica que resultaria da consideração do modelo mais geral que a Termodinâmica Irreversível oferece.

Além daquela complexidade, outra objecção se levantaria nas aplicações e que seria resultante da imprecisão com que se conhecem as características térmicas dos materiais, ou os constrangimentos reais que se exercem no sólido, os quais são característicos do problema a resolver.

No domínio corrente das aplicações é portanto geralmente admissível a consideração de modelos simplificados e é de alguns deles que nos iremos ocupar tendo esta curta introdução apenas a finalidade de colocar o problema dentro dum contexto mais geral que permita melhor situar os casos que usualmente se tratam.

1 — Formulação do modelo

1.0 — *Simbologia*

T, T^* — Temperatura — (a origem da escala é arbitrária)
T_1 e T_0 — Temperatura inicial do sólido e do meio exterior, respectivamente — constantes
t — tempo
U — energia interna
Q — quantidade de calor (por unidade de volume e tempo — fonte — nalguns casos)
c — calor específico
$\vec{q}$ — fluxo térmico
ρ — massa específica
K — condutividade térmica
α — difusividade térmica $= \frac{K}{\rho c}$
h — coeficiente de transmissão de superfície
F_u — Número de Fourier $\frac{\alpha t}{l^2}$
B_i — Número de Biot — $\frac{h\,l}{K}$
$H = \frac{h}{K}$
P — ponto genérico no sólido
x, y, z — coordenadas cartezianas
r — raio (coordenadas esféricas ou cilíndricas)
R — raio da superfície exterior
D — domínio em que existe o sólido
B — contorno de D
B_c — parte de B comum a dois domínios
$\vec{n}$ — normal exterior a B
V — volume
S — superfície
l — metade da espessura da placa
q^2, β, γ — valores próprios
φ — função própria
Ψ — função do tempo
$F(P)$ — temperatura no sólido para $t = 0$

(3) De igual modo terá em conta a existência dos potenciais nos elementos da matriz defenindo estas o valor constante do potencial que seja necessário considerar.

[ ] — bibliografia
( ) — notas à margem

— Formulação

1.1 — No estudo da condução do calor em sólidos admitiremos que: (4)

a) O sólido em estudo está contido numa região D limitada por um contorno B;
b) O calor é a única forma de energia permutada entre as várias regiões do sólido ou deste com o exterior através do contorno (5);
c) Em cada elemento de volume do sólido a variação de energia interna se exprime por

$$dU = c \cdot \rho \cdot dT \quad (6)$$

d) Existirão geralmente no sólido fontes (ou poços) de calor de intensidade Q ($\gtrless 0$) por unidade de volume (7);
e) Não se verificam mudanças de fase.
f-) Entre a temperatura e o fluxo de calor num ponto verifica-se a relação de Fourier (8).

$$\vec{q} = -K \text{ grad } T$$

sendo $K \geqslant 0$

1.2 — Dentro das hipóteses anteriores se considerarmos um sólido de volume V, limitado pela superfície S, a conservação da energia implica que:

$$-\int_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, ds + \int_V Q \, dV = \int_V \frac{\partial U}{\partial t} \, dV$$

ou seja

$$-\int_V \text{div } \vec{q} \cdot dV + \int_V Q \, dV = \int_V \frac{\partial U}{\partial t} \, dV$$

---

(4) Supõe-se implícito o tratamento macroscópico e o sólido contínuo do ponto de vista matemático. Tal implica a consideração de elementos de volume macroscòpicamente muito pequenos mas microscòpicamente muito grandes. Pràticamente a distância mínima que se considera é superior às distâncias interatómicas.

(5) O que implica que o sólido se não deforma ou que o trabalho a este associado é nulo — em rigor; em geral considera-se que é desprezável.

(6) Não se considerando outras formas de energia que não calor, e tendo em conta b) c identifica-se com c_V — calor específico a deformação constante. Como porém em geral embora desprezando a deformação esta não é nula, c não fica bem defenido. Este ponto encontra-se omisso em quase todas a tratados sobre a condução do calor, nos quais quando se identifica c é com c_p. Tal pode fazer-se supondo nulo o trabalho interno de deformação, e que o sólido troca trabalho com um meio exterior (através dé B) a pressão constante embora sem alterar pràticamente a sua forma geométrica.

Prefere-se a formulação adoptada porque compreendendo as anteriores permite a melhor identificação consoante os constrangimentos reais — continuando òbviamente a considerar sempre apenas o caso em que não há alteração apreciável das formas geométricas. (Aliás num sólido, e dentro destas condições c_p e c_V são pràticamente iguais numèricamente).

(7) A consideração de fontes de calor — fontes de entropia — é geralmente como já se indicou a forma simples de desprezando a existência de outras trocas de energia (não calor) se ter em conta a irreversibilidade dessa permuta. Por exemplo, não se terá em conta num condutor percorrido por uma corrente eléctrica o efeito do acoplamento deste fluxo, ou de existência do respectivo potencial mas dar-se-á conta da irreversibilidade que se traduz pelo efeito de Joule introduzindo este sob a forma duma fonte de calor.

Também se consideram por vezes fontes referidas a unidade de superfície ou de comprimento. Embora sem realidade física, tal como o anterior, justifica-se por simplificação do modelo físico ou por artifício analítico.

(8) Implìcitamente admite-se a isotropia do sólido. Se o sólido não é isótropo K é um tensor de segunda ordem simétrico. Neste caso cada componente do fluxo térmico segundo uma direcção é função linear das componentes do gradiente, os coeficientes são termos da matriz de ligação entre fluxos e afinidades, (neste caso referentes a fluxos que embora diferentes são da mesma natureza) — V. [5], [6].

A anisotropia raramente se considera nas aplicações. V. [1], [3], [4].

— A relação de Fourier, implica uma transmissão instantânea da perturbação. Tal não se verifica, mas admite se porque a velocidade de propagação é muito grande. Tendo-a em conta, introduz-se em primeira apoximação no primeiro membro $\delta \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}$, sendo δ uma constante de tempo. Com esta relação obter-se-ia não a equação do calor mas a equação dos telegrafistas, a qual só pode vir a ter interesse quando se considera a condução do calor em gases rarefeitos p. ex.

donde passando ao limite, será

$$-\operatorname{div}\vec{q}+Q=\frac{\partial U}{\partial t}$$

e por c) e f)

$$\operatorname{div}(-K\operatorname{grad}T)+Q=c\rho\frac{\partial T}{\partial t}$$

ou, usando o operador ∇

$$1.1 \qquad \nabla\cdot(K\nabla T)+Q=c\rho\frac{\partial T}{\partial t}$$

se o sólido é homogéneo e K independente de T, 1.1 pode escrever-se fazendo $\frac{K}{\rho c}=\alpha$ — difusividade térmica

$$1.2 \qquad \nabla^2 T=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{Q}{\rho c}$$

e se $Q=0$

$$1.3 \qquad \nabla^2 T=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

e se o regime é estacionário

$$1.4 \qquad \nabla^2 T=0$$

A equação 1.3 é a conhecida equação do calor. 1.4 é a equação de Laplace. Se o regime é estacionário mas $Q\neq 0$

$$1.5 \qquad \nabla^2 T=-\frac{Q}{\rho c}$$

que é a equação de Poisson.

1.3 — Na sua forma geral — 1.1, a equação não é linear nem homogénea e a solução analítica é difícil de obter (9).

Se K é apenas função da temperatura pode obter-se uma equação formalmente análoga a 1.2 introduzindo uma nova escala de temperaturas por

$$T'(T)=\frac{1}{K_0}\int_{T_0}^{T}K(T)\,dT$$

com o que 1.2 se pode escrever

$$1.2' \qquad \nabla^2 T'=\frac{1}{\alpha(T)}\frac{\partial T'}{\partial t}-\frac{Q}{K_0}$$

(9) Para o caso geral conhecem-se muito poucas soluções analíticas mesmo para formas simples de K (P, T) e Q (P).

Embora a consideração de $K=K(T)$ tenha importância sempre que se considera um intervalo apreciável de temperaturas, K admite-se geralmente constante. A variação de K com T admite-se, quando se tem em conta, quase sempre linear, mas as aplicações são em geral dificultadas porque mesmo nesta forma simples os coeficientes de variação apenas se conhecem para pouco materiais (10).

1.4 — As soluções analíticas que se conhecem em maior número referem-se à equação 1.3. Dado o seu interesse nas aplicações é dela que em particular nos ocuparemos enquanto considerados os métodos analíticos.

2 — Condições iniciais e no contorno

Os problemas em condução do calor sintetizam-se em determinar:

a) a função que satisfaz a equação às derivadas parciais dada, que

b) Verifique certas condições no contorno (superfície no sólido) e que

c) Assuma num dado constante (tomado para inicial geralmente) certo valor no domínio.

As condições *a*), *b*), *c*) garantem a unicidade da solução (11) como o exige o sentido físico do problema [8].

Dentro desta formulação geral cada par de condições (iniciais e no contorno) representa um problema particular, o que é uma característica dos problemas físicos que se formulam matemàticamente deste modo. Existe assim um número infinito de problemas de que se não conhece método analítico de obter a solução. Por este motivo e em ordem a simplificar o tratamento analítico apenas se considera usualmente um número restrito de condições no contorno, e se admite que T em D satisfaz as condições de Dirichelet.

(10) Será objecto de futura publicação o método que seguimos no N. E. E. M. para a sua determinação.

(11) A unicidade de solução demonstra-se matemàticamente para $\frac{\partial T}{\partial n}$, $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ e $\frac{\partial T}{\partial z}$ limitados em B e D respectivamente e T contínuo em $t\,(-t\geq o)$ [1]. No caso geral o problema de unicidade não tem interesse nas aplicações, em que, quando necessário é testada em cada caso particular tratado.

2.1 — *Condições no contorno*

As condições que é normal considerar no contorno (B) são:

2.1.1 — Temperatura em B função imposta de t e P.

$$2.1 \qquad T_B = T\,(P, t)_B$$

2.1.2 — Fluxo de calor imposto através de B

$$2.2 \qquad \left(K \frac{\partial T}{\partial n}\right)_B = \left(\vec{q} \cdot \vec{n}\right)_B$$

ou, como caso particular, e correspondendo ao caso de isolamento térmico perfeito:

$$2.3 \qquad \left(K \frac{\partial T}{\partial n}\right)_B = 0$$

2.1.3. — Fluxo de calor através de B proporcional à diferença de temperatura entre B e o meio exterior suposto a T_0 uniforme.

$$2.4 \qquad \left(K \frac{\partial T}{\partial n}\right)_B = \left\{h\,[\,T_0 - T\,(P, t)\,]\right\}_B$$

e $h \geqslant 0$ (12) e geralmente $h = h\,(P, t)$,

h será designado por coeficiente de transmissão de superfície (se $h = 0$ 2.4 transforma-se em 2.3; se $h = \infty$, como $K \frac{\partial T}{\partial n}$ é finito por hipótese, deverá ser $T_0 = T$, e 2.4 transforma-se em 2.1).

2.1.4 — Dois sólidos 1 e 2 em contacto ao longo de B_c sem resistência térmica de contacto:

$$2.5 \quad \begin{cases} T_1\,(P, t)_B = T_2\,(P, t) \\ \left(K_1 \dfrac{\partial T_1}{\partial n}\right)_{Bc} = \left(K_2 \dfrac{\partial T_2}{\partial n}\right)_{Bc} \end{cases} \quad (13)$$

Se existe uma resistência de contacto R a 1.ª equação 2.5 é substituída por uma condição do tipo 2.4 com $h = \frac{1}{R}$ e $T_0 = T_2\,(P_c, t)_B$.

2.1.5 — Apesar de formalmente simplificado o tratamento analítico que se conhece impõe geralmente restrições importantes nas condições anteriores. Assim, h e as restantes funções são consideradas constantes na superfície (B) ou pelo menos em domínios finitos em que aquela se subdivide — quanto à dependência do ponto. Quanto à dependência no tempo o problema trata-se recorrendo ao teorema de Duhamel que reduz o problema a um de condições no contorno independentes do tempo (14).

3 — Métodos analíticos em regime variável

3.0 — Como se indicou a forma mais geral que usualmente se considera da equação do calor é 1.2.

Em face do anterior o problema formula-se pois, matemàticamente, do seguinte modo:

Determinar $T = T\,(P, t)$ para P em $B + D$ e $t \geqslant 0$.

Tal que

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q}{\rho c} \quad \text{para P em D e } t \geqslant 0.$$

Sujeita a uma das condições 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 ou 2.5, ou sua combinação (15) para P em B e tal que

$$T\,(P, 0) = F\,(P) \quad \text{para P em D e } t = 0$$

Não se tratando da consideração exaustiva dos métodos matemáticos de tratamento do problema — que é um dos capítulos mais importantes da análise — abordaremos apenas, alguns dos mais úteis do ponto de vista do engenheiro, que no presente trabalho se reduzirão ao método de separação de variáveis e pròximamente os das transformadas integrais, como exemplificativas de métodos analíticos.

3.1 — *Método de separação de variáveis*

3.1.0 — Consideremos as seguintes simplificações relativamente ao modelo mais geral proposto:

a) k, ρ, c são constantes (e ∴ α)

(12) Esta condição resulta simplesmente do 2.º princípio da termodinâmica pois $K \geqslant 0$.

(13) Será $\vec{n} = \vec{n}_1$ ou $\vec{n} = \vec{n}_2$ a normal comum aos dois sólidos sobre B_c — sendo òbviamente exterior em relação a um e interior relativamente ao outro.

(14) V. [1] para a demonstração clássica. Será por nós apresentado quando tratarmos da aplicação do cálculo operacional, onde este teorema se identifica com o integral de Faltung, ou da convulsão [9].

(15) Òbviamente B poderá subdividir-se em subcontornos B_a, B_b, B_c ... B_i, e $B = \Sigma B_i$.

Sendo em cada B_i aplicável uma condição.

b) o domínio $D + B$ é finito e regular

c) $F(P)$ satisfaz em D às condições de Dirichelet

d) $T(P, t)$ é de classe $C^{(2)}$ em $(D + B)$ para $t \geqslant 0$)

e) sobre o contorno (B) verificam-se condições do tipo 2.4 independentes de t [16]

f) $Q(P) = 0$ [16]

e admitamos, o que é característico do método, que

g) $T_i(P, t)$ satisfazendo a equação do calor e as condições no contorno se pode exprimir em D pelo produto duma função só de P e outra só de t não idênticamente nulas [17] para $t \geqslant 0$

$$T_i(P, t) = \varphi_i(P)\,\psi(t)$$

h) o sistema de funções próprias φ_i se ortogonal, ou ortogonalizável constitui um sistema completo [8, 9].

3.1.0.1 — Tomemos como origem da escala de temperaturas T_0 e façamos $H = \frac{h}{K}$ $(\geqslant 0)$.

Pretendemos determinar $T(P, t)$ tal que:

$$1.3 \qquad \nabla^2 T - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad P \text{ em } D \text{ e } t > 0$$

$$2.4' \qquad \frac{\partial T}{\partial n} + H T = 0 \qquad P \text{ em } B \text{ e } t > 0$$

$$3.1 \qquad T(P, 0) = F(P) \qquad P \text{ em } B \text{ e } t = 0$$

Como por hipótese:

3.2 $T_i = \varphi_i(P)\,\Psi(t)$, satisfaz 1.3 e 2.4 obtém-se, substituindo em 1.3, que deve ser

$$3.3 \qquad \frac{\nabla^2 \varphi(P)}{\varphi(P)} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} \qquad (\alpha > 0)$$

o 1° membro é só função de P e o segundo só de t — são pois iguais a uma constante, que designaremos por λ.

Será portanto

$$3.4 \qquad \nabla^2 \varphi_i(P) - \lambda_i \Psi(P) = 0 \qquad P \text{ em } D$$

$$3.5 \qquad \frac{d\Psi}{dt} - \lambda_i \alpha \Psi = 0 \qquad t > 0$$

(16) V. capítulo 3.2 condições mais gerais.

(17) Considerar alguma ou ambas idênticamente nulas implicará admitir-se um equilíbrio termoestático indefenidamente.

Substituindo 3.2 em 2.4' e atendendo a que esta derivação só envolve coordenadas espaciais, vem

$$\Psi(t)\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + H\varphi\right] = 0 \qquad \text{para P em B e } t > 0$$

e como $\Psi(t)$ não é idênticamente nulo, por hipótese, deverá ser

$$3.6 \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + H\varphi_i = 0 \qquad \text{para P em B}$$

3.1.0.1.1 — *Considere-se agora o teorema de Ostrogradsky:*

$$\int_v \nabla \cdot \vec{a}\, dv = \int_s (\vec{a} \cdot \vec{n})\, ds$$

sejam f_1 e f_2 duas funções escalares do ponto e faça-se $a = f_1 \nabla f_2$ obtém-se, substituindo acima, a identidade

$$3.7 \qquad \int_v (f_1 \nabla^2 f_2 + (\overrightarrow{\nabla f_1}) \cdot (\overrightarrow{\nabla f_2}))\, dv = \int_s f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n}\, ds$$

Façamos agora $f_1 = f_2 = \varphi_i$, obtém-se da anterior [18] fazendo $V = D$ a $S = B$

$$\int_D \varphi_i \nabla^2 \varphi_i\, dv + \int_D (\overrightarrow{\nabla \varphi_i}) \cdot (\overrightarrow{\nabla \varphi_i})\, dv = \int_B \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\, ds$$

substituindo $\nabla^2 \varphi_i$ de 3.4 e $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}$ de 3.6 resulta, atendendo a que λ_i é constante e φ_i não idênticamente nulo:

$$3.8 \qquad \lambda_i = \frac{\int_D (\overrightarrow{\nabla \varphi_i}) \cdot (\overrightarrow{\nabla \varphi_i})\, dv + \int_B H \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right)^2 ds}{\int_D \varphi_i^2\, dv}$$

como $H > 0$ por defenição, a fracção é não negativa e é portanto

$$3.9 \qquad \lambda_i \leqslant 0$$

E o sinal de igualdade só poderá verificar-se se $H = 0$ ou $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0$ e $\nabla \varphi_i = 0$.

Esta última condição significa que $\varphi_i = \text{const}$ e portanto que a temperatura se mantém indefenidamente constante, pois ψ é não idênticamente

(18) Por *d*) e *g*) e pela conclusão a que se chega quanto a ψ, φ_i satisfaz as condições para ser válida a identidade.

CENTRO DE PROJECTOS

COLOCA A SUA EXPERIÊNCIA AO SERVIÇO DA INDÚSTRIA NACIONAL

TORRE DE REFRIGERAÇÃO

NA ASSISTÊNCIA TÉCNICA

O CENTRO DE PROJECTOS CUF PODE PRESTAR ASSISTÊNCIA NAS DIVERSAS FASES DE UM PROJECTO, QUER COMO CONSULTOR NA AQUISIÇÃO DE MATERIAL, QUER FAZENDO A SUA POSTERIOR INSPECÇÃO E RECEPCÇÃO

O CONJUNTO DE TÉCNICOS DE QUE DISPÕE, O APOIO DA LONGA EXPERIÊNCIA INDUSTRIAL DA COMPANHIA UNIÃO FABRIL NOS VÁRIOS RAMOS DA INDÚSTRIA E AINDA A COLABORAÇÃO COM FIRMAS ESTRANGEIRAS GARANTEM A QUALIDADE DAS REALIZAÇÕES QUE LHE FOREM ENTREGUES

EXPONHA OS SEUS PROBLEMAS E DIRIJA AS SUAS CONSULTAS A **CENTRO DE PROJECTOS CUF** AV. 24 DE JULHO, 170 TELEF. 67 20 61 LISBOA - PORTUGAL TELEG. PROFABRIL CP-5

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS

SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 93
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

FELTROS, FILTROS E TECIDOS INDUSTRIAIS PARA TODOS OS FINS:

EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS,
DE QUALQUER FIBRA

PASTA PARA PAPEL
PAPEL
FIBROCIMENTO
CURTUMES
FIAÇÕES DE ALGODÃO
LINHAS
INDÚSTRIAS QUÍMICAS

TECELAGENS
ACABAMENTOS
TINTURARIAS
LAVANDARIAS
ESTAMPARIAS
FILTROS
DESPOEIRAGEM

FLUIDO E MASTIC

IMPERMEABILIZAÇÕES

TORNA TUDO ESTANQUE

Impermeabilização e vedação perfeita de:

Terraços, Empenas, Algerozes, Clarabóias,
Paredes húmidas, Coberturas, Fendas,
Juntas de dilatação, etc., etc.

Fácil aplicação — Elasticidade excepcional
Não endurece nem apodrece

ROOFATEX À base de borracha + alumínio

Reforça a acção impermeabilizante do «Rubio», dando às construções um aspecto agradável — Protege todos os materiais contra a humidade, a ferrugem e a corrosão

RUBIO E ROOFATEX dois produtos que se completam

Representante exclusivo: Orlando Fernandes

Rua Palmira, 46-A-B-C — LISBOA-1 — Telefs. 83 01 63 - 84 26 39 — End. teleg. «ORFER»

nulo e é limitado como se verá. A condição $H = 0$ ou $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0$ significaria um sistema isolado donde a conclusão física trivial de que o sistema em equilíbrio Termoestático permaneceria indefenidamente nesse estado porque isolado.

Para acentuarmos o carácter não positivo de λ_i faremos

3.10 $\lambda_i = - q_i^2$

considere-se agora 3.5; integrando e atendendo a 3.9 obtém-se

3.11 $\Psi = c\, e^{-q_i^2 \alpha t}$

sendo c uma constante arbitrária ($\neq 0$)

de 3.11 conclui-se que ψ é limitada (pois $q_i^2 \geqslant 0$) como se afirmou (19).

3.1.0.1.2 — os q_i^2 são como se sabe os valores próprios da equação de Helmoltz no problema defenido pelas condições no contorno 3.6. A cada um corresponde uma função própria φ_i (20). Os q_i^2, para que φ_i seja função própria não são quaisquer, podendo assumir apenas um número, discreto de valores (21).

Verifiquemos agora que o sistema de funções próprias $\varphi_i \ldots \varphi_j$ correspondentes a $q_i^2 \ldots q_j^2$ são ortogonais.

De 3.7 permutando f_1 e f_2 e subtraindo as duas expressões obtém-se a identidade de Green:

$$\int_D (f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1)\, dv = \int_B \left(f1 \frac{\partial f_2}{\partial n} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n} \right) ds$$

(19) Tal corresponde à conclusão física, evidente, de que no sistema isolado constituído pelo sólido + meio exterior a entropia não pode diminuir. A forma clássica de justificar a afirmação à priori de que $\lambda_i \leqslant o$ deriva directamente desta conclusão, que se exprime dizendo que por razões de ordem física T não pode crescer indefenidamente.

Chama-se contudo a atenção para o facto desta conclusão ser obtida sem necessidade de introduzir outras hipóteses além das referidas na formulação do modelo. Na forma usual de proceder, existe redundância nos postulados, como se vê.

O ser $\lambda_i \leqslant o$ corresponde a afirmar que o sistema é puramente dissipativo — perturbado tende para o equilíbrio por relaxação pura.

(20) De notar que a um q_i^2 pode corresponder mais do que uma função própria — o caso aflora-se adiante.

(21) Não se faz a demonstração [8 - 10] — supõe-se na formulação contida em afirmar que φ_i é função própria.

fazendo $\varphi_i = f_1$ e $\varphi_j = f_2$ resulta atendendo novamente a 3.4 e 3.6

$$\int_D (\varphi_i \cdot q_j^2 \varphi_j - \varphi_j \cdot q_i^2 \varphi_i)\, dv =$$

$$= \int_B (-H \varphi_i \varphi_j + H \varphi_j \varphi_i)\, ds$$

e por serem q_i^2 e q_j^2 constantes

3.12 $(q_i^2 - q_j^2) \int_D \varphi_i \varphi_j\, dv = 0$

donde, se $q_i^2 \neq q_j^2$

3.13 $\int_D \varphi_i \varphi_j\, dv = 0 \qquad (i \neq j)$

o que exprime a ortogonalidade das funções próprias no domínio D (22).

3.1.0.1.3 — Demonstradas as características particulares de φ e Ψ para que $T_i = \varphi_i (P)\, \Psi (t)$ seja solução de 1.3 e 2.4' resta encontrar a função que satisfazendo também 3.1 é a solução do problema.

Ora, dada a linearidade das equações 3.1 e 2.4' se T_i for solução $T = \sum_i T_i = \sum_i^{\infty} C_i \varphi_i (P)\, e^{-q_i^2 \alpha t}$ também é solução de 1.3 e 2.4' se a série for convergente.

Para que $T(P, t)$ seja solução do problema é necessário que $T(P, o) = \sum_i C_i \varphi_i (P) = F(P)$.

Mas o sistema das funções próprias é ortogonal (ou ortogonalizável) e por hipótese é completo. Segue-se que $F(P)$ pode ser representado em D pelo desenvolvimento em série dos φ_i, para o que basta determinar os coeficientes C_i. Estes determinam-se atendendo às relações de ortogonalidade:

$$\int_D F(P)\, \varphi_i\, dv = \sum_k \int_D C_k \varphi_i \varphi_k\, dv = C_i \int_D \varphi_i^2\, dv$$

(22) Como se indicou, a um valor próprio podem corresponder funções próprias diferentes — por ex. φ_i e ϕ_i — e neste caso 3.12 não demonstra a ortogonalidade pois o parênteses é nulo. Mas os φ_i e ϕ_i são linearmente independentes, como é óbvio, o que permite construir a partir delas por combinação linear um sistema ortogonal. Dada a linearidade das equações o sistema é equivalente. Por se afastar demasiado do âmbito do trabalho não se demonstrará aqui este aspecto particular — V. p. ex. [8].

donde

$$3.14 \qquad C_i = \frac{\int_D F(P)\, \varphi_i \, dv}{\int_D \varphi_i^2 \, dv}$$

e a solução do problema será

$$3.15 \qquad T(P, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \, \varphi_i (P) \, e^{-q_i^2 \alpha t}$$

3.1.0.2 — Exemplo analítico.

Considere-se o problema clássico duma placa inflnita segundo y e z, de espessura 2 l ($-l \leqslant x \leqslant l$), inicialmente à temperatura $T(x, 0) = F(x)$, instante em que se mergulha num meio a temperatura T_0 constante e uniforme. O coeficiente de superfície h é igual para ambas as faces e constante, e a placa supõe-se homogénea e isótropa, e de propriedades térmicas (Kec) independentes da temperatura. Pretende saber-se a evolução das temperaturas no interior da placa ao longo do tempo.

Como a temperatura inicial é só função de x, e como a sua extensão infinita segundo y e z equivale a um isolamento segundo planos perpendiculares a essas direcções, a temperatura deverá continuar a ser apenas (por razões de simetria) função só de x. O problema trata-se matemàticamente a uma dimensão, sendo o domínio D $-l < x < l$ e o contorno $x = \pm l$.

A sua formulação é, tomando T_0 como origem da escala da temperatura e pondo $H = \frac{h}{K}$

Determinar $T = T(x, t)$ tal que

$$3.16 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \text{ para } -l < x < l$$

$$\text{e} \qquad t > 0$$

e que

$$3.17 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{+l} = -H\,T(l, t) \quad x = l \quad t > 0$$

$$3.18 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{-l} = .\,H\,T(-l, t) \quad x = -l \quad t > 0$$

Sendo

$$3.19 \qquad T(x, 0) = F(x) \quad -l < x < l \text{ e } t = 0$$

A solução obtém-se pelo método indicado que se aplica agora directamente.

A equação de Helmoltz correspondente obtém-se escrevendo em coordenadas cartesianas e a uma dimensão

$$3.20 \qquad \frac{dT}{dx} + q_i^2 T = 0$$

Trata-se neste caso duma equação deferencial ordinária, o que permite individualizar imediatamente as possíveis funções próprias que estarão òbviamente contidas no integral geral (23).

$$3.21 \qquad F_i(x) = A \cos q\,x + B \,.\, \text{sen}\, q\,x$$

de que podem ser os seguintes casos particulares (exceptuando o caso de 3.21 já o ser) com $|Ai| + |Bi| \neq 0$).

a) $A \neq 0 \quad B = 0$

b) $A = 0 \quad B \neq 0$

Verifiquemos sucessivamente a) e b).

3.1.0.2.1 — Para que $f = A \cos q\,x$ ($Ai \neq 0$) seja função própria deve verificar 3.17 e 3.18 ou seja, deve ser simultaneamente:

$$A\,q\,\text{sen}\,q\,l = A\,H \cos q\,l$$

$$A\,q\,\text{sen}\,(-q\,l) = -A\,H \cos(-q\,l)$$

Como se verifica as duas equações conduzem à mesma condição ($Pi \neq 0$).

$$q\,\text{sen}\,q\,l = H \cos q\,l$$

que se costuma escrever

$$3.22 \qquad (q\,l\,\text{tag}\,(q\,l) = H\,l$$

igualdade que só é satisfeita para os valores discretos do parâmetro q_i ($i = 1 \ldots n$) que são raízes da equação transcendente 3.22. Estas raízes podem determinar-se gràficamente verificando-se com facilidade que são em número infinito (24) e reais

Considera-se agora o caso b):

$$f = B\,\text{sen}\,q\,x \quad (B \neq 0)$$

Anàlogamente se conclui que os q não são quaisquer mas apenas as raízes da equação transcendente (24)

$$3.23 \qquad (q\,l)\,\text{cotg}\,(q\,l) + H\,l = 0$$

---

(23) Se se tratasse do caso geral da equação às derivadas parciais a solução geral só raramente teria interesse prático dadas as suas características muito genéricas. Começa-se nesse caso, usualmente, por procurar funções que satisfaçam as condições no contorno. V. [8] p. ex.

(24) Em [1] encontram-se tabeladas as primeiras seis raízes. Em [2], [4], [13] também podem encontrar-se tabelas, mas mais incompletas.

que são reais e em número infinito q_k ($K = 1 \ldots$).

Verifica-se também que sendo $q_i \neq q_k$ 3.21 não poderá ser função própria.

Ponhamos

$$q_i = \beta_i \quad (i = 1 \ldots)$$
$$q_k = \delta_i \quad (i = K = 1 \ldots)$$

para distinguirmos os valores próprios correspondentes a cada caso. O sistema de funções próprias será pois

$$\cos \beta_1 , \quad \operatorname{sen} \delta_1 , \quad \cos \beta_2 , \quad \operatorname{sen} \delta_2 \ldots$$

que já sabemos ser ortogonal. É além disso completo para o que basta notar que se identifica com os termos duma série de Fourier.

Se F(x) satisfaz as condições de Dirichelet, no intervalo $-l < x < l$ é nesse intervalo

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos \beta_i x + B_i \operatorname{sen} \delta_i x)$$

Obtendo se por 3.14 os coeficientes:

$$3.24 \quad A_i = \frac{\int_{-l}^{+l} F(x) \cos (\beta_i x)\, dx}{\int_{-l}^{+l} \cos^2 (\beta_i x)\, dx}$$

$$3.25 \quad B_i = \frac{\int_{-l}^{+l} F(x) \operatorname{sen} (\delta_i x)}{\int_{-l}^{+l} \operatorname{sen}^2 (\delta_i x)\, dx}$$

donde a solução do problema

$$3.26 \quad T(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[A_i \cos (\beta_i x)\, e^{-\beta_i^2 \alpha t} + B_i \operatorname{sen} (\delta_i x)\, e^{-\delta_i^2 \alpha t} \right]$$

Havendo apenas que juntar T_0 ao segundo membro para que T se exprima na escala de temperaturas onde o meio exterior está a T_0.

3.1.0.2.2 — Consideremos o caso particular da temperatura inicial ser uniforme e igual a T_1 relativamente à origem da escala em T_0.

Será então $F(x) = T_1 = \text{const} = T(x, 0)$

como $x = 0$ coincide com o centro da placa segue-se que F (x) é par donde $B_i \equiv 0$ (25). E obtém-se para A_i

$$3.27 \quad A_i = \frac{T_1 \int_{-l}^{+l} \cos (\beta_i x)\, dx}{\int_{-l}^{+l} \cos^2 (\beta_i x)\, dx} = T_1 \cdot \frac{2 \operatorname{sen} (\beta_i l)}{\operatorname{sen} (\beta_i l) \cos (\beta_i l) + \beta_i l}$$

donde:

$$3.28 \quad T(x, t) = T_1 \sum_{i=1}^{\infty} 2 \frac{\operatorname{sen} \gamma_i}{\operatorname{sen} \gamma_i \cos \gamma_i + \gamma_i} e^{-\gamma_i^2 \frac{\alpha t}{l^2}} \cos \left(\gamma_i \frac{x}{l} \right)$$

tendo-se feito para simplicidade de escrita

$$\gamma_i = \beta_i l$$

se considerarmos a escala habitual de temperaturas, teremos, de 3.28 e por defenição de T e T_1

$$3.29 \quad \frac{T_x - T_0}{T_1 - T_0} = \sum_{i=1}^{\infty} 2 \frac{\operatorname{sen} \gamma_i}{\operatorname{sen} \gamma_i \cos \gamma_i + \gamma_i} e^{-\gamma_i^2 \frac{\alpha t}{l^2}} \cos \left(\gamma_i \frac{x}{l} \right)$$

A expressão 3.29 é adimensional o que se presta particularmente bem à representação gráfica das soluções o que se faz usualmente tomando os dois números adimensionais

$$B_i = H l = \frac{h l}{k} \text{ — número de Biot}$$

$$F_u = \frac{\alpha t}{l^2} \text{ — número de Fourier}$$

um como parâmetro o outro como variável (26), e considerando $x = 0$ ou $x = l$, e por vezes gráficos para a conversão para qualquer valor de $\frac{x}{l}$

(25) Deve notar-se relativamente ao problema de F (x) não constante que os valores próprios são função da «situação» da placa relativamente ao eixo das coordenadas. Se a tivessemos defenido por exemplo no domínio $o \leqslant x \leqslant 2 l$ obtinha-se que $B \equiv o$ e $T(x, t)$ exprimia-se apenas por uma série de cosenos. Preferiu-se o domínio $-l \leqslant x \leqslant l$ para que a solução exemplificasse o mais amplamente possível o método.

(26) Tais representações, efectuadas também para o caso do cilindro, e esfera foram feitas entre outros por Gurney-Lurie [14], Gröber [4], Hottel [14], Pachkis [2],

[15, 14 . . .] Como fàcilmente se verifica a série converge ràpidamente com o número de Fourier e como os γ_i são crescentes podem geralmente usar-se apenas os primeiros termos para números de Fourier pequenos.

Para valores muito pequenos do número de Fourier, o que interessa por exemplo no estudo do choque térmico, tratamentos térmicos, etc., a série converge lentamente e é pouco prática a sua utilização. Deve então usar-se outra forma de solução que é equivalente mas ràpidamente convergente para F_u pequeno e que se obterá quando abordarmos o cálculo operacional.

Deve notar-se, como já se acentuou, que o caso de a condição no contorno ser uma temperatura dada se deduz do anterior quando $h \to \infty$ (27).

3.1.0.2.3—Considera-se exemplificado o método, mas por ser de interesse nas aplicações, apresentaremos sem dedução (28) devida a limitação de espaço as soluções que se obteriam no caso do cilindro e da esfera, de raio R homogéneos, isótropos e de propriedades constantes, a temperatura inicial constante T1, h uniforme e o meio a T_o, também constante.

3.1.0.2.3.1 — No caso do cilíndro, nas condições anteriores obtém-se para a equação de Helmoltz e em coordenadas cilíndricas.

$$3.30 \qquad \frac{d^2 \varphi}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi}{d r} + q^2 \varphi = 0$$

que é a equação de Bessel da ordem zero.

Os valores próprios q_k são as raízes (24) da equação transcendente.

$$3.31 \qquad (q R)\, J_1 (q R) = H\, J_o (q R)$$

J_o e J_1 são as funções de Bessel de primeira espécie e de ordem zero e ordem um respectivamente.

A solução é dada por:

$$3.32 \qquad \frac{T - T_o}{T_1 - T_o} =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{2}{\mu_k} \frac{J_1 (\mu_k)}{J_o^2 (\mu_k) + J_1^2 (\mu_k)} e^{-\mu_k^2 \frac{\alpha t}{R^2}} J_o \left(\mu_k \frac{r}{R}\right)$$

Sendo $\mu_k = q_k \cdot R$

A série é também ràpidamente convergente mesmo para valores relativamente pequenos do número de Fourier.

3.1.0.2.3.2 — No caso da esfera, obter-se-ia:

$$3.33 \qquad \frac{d^2 \varphi}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{d \varphi}{d r} + q^2 \varphi = 0$$

E os valores próprios q_k são as raízes (24) da equação transcendente

$$3.34 \qquad (1 - H R) = (q R) \operatorname{cotg} (q R)$$

e a solução é dada por

$$3.35 \qquad \frac{T - T_o}{T_1 - T_o} =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty 2 \frac{\operatorname{sen} \upsilon_k - \upsilon_k \cos \upsilon_k}{\upsilon_k - \operatorname{sen} \upsilon_k \cos \upsilon_k} e^{-\upsilon_k^2 \frac{\alpha t}{R^2}} \frac{\operatorname{sen} \left(\upsilon_k \frac{r}{R}\right)}{\upsilon_k \frac{r}{R}}$$

sendo $\upsilon_k = q_k R$

3.1.0.3 — Tem interesse referir ainda a possibilidade de simplificação que por vezes existe na solução dos problemas quando as condições no contorno assumem certas formas particulares que permitem desdobrar o problema geral em problemas mais simples. Tal é o caso, por exemplo, de problemas a três dimensões, em que a solução se pode obter pelo produto de soluções de três problemas a uma dimensão, e que pelo seu interesse prático a seguir se exemplifica.

3.1.0.3.1 — Suponha-se o caso da condução de calor num paralelipípedo rectângulo, em que o problema se exprime por:

Determinar T (P, t) tal que:

$$3.36 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Para $t > 0$ e $a_1 < x_1 < b_1$
$a_2 < x_2 < b_2$
$a_3 < x_3 < b_3$

Heisler [16], etc. mas apenas as últimas abrangem a gama de valores que se encontram nas aplicações; as outras abrangem com certa precisão a curta região que englobam. Os de mais interesse encontram-se na AEIST — Secção fotográfica para uso dos alunos de Caldeiras e Permutadores de calor.

(27) É cómodo neste caso o tabelamento de 3.29 feito para x = o por Olson e Schultz [16].

(28) Pode consultar-se qualquer das obras já citadas [1, 2, 4, 13].

sujeito a

$$3.37 \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = H_i T \quad \text{para } x_i = a_i \text{ e } t > 0$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

e a

$$3.35 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -H_i^1 \quad \text{para } x_i = b_i \quad t > 0$$

sendo H_i e H_i^1 constantes (> 0)
e tal que no instante inicial

$$3.39 \quad T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_1(x_1, 0)\, T_2(x_2, 0)\, T_3(x_3, 0)$$

$$t > 0$$

Neste caso o problema pode desdobrar-se nos três problemas seguintes a uma dimensão:

Determinar $T_i(x_i, t)$
tal que

$$3.40 \quad \frac{\partial^2 T_i}{\partial x_i^2} = \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad \text{para } t > 0 \text{ e } a_i < x_i < b_i$$

$$3.41 \quad \frac{\partial T_i}{\partial x_i} = H_i T_i \quad t > 0 \text{ e } x_i = a_i$$

$$3.42 \quad \frac{\partial T_i}{\partial x_i} = -H_i T_i \quad t > 0 \text{ e } x_i = b_i$$

sendo no instante inicial

$$T_i(x_i, 0) = T_i(x_i, 0) \quad t = 0 \quad a_i < x_i < b_i$$

com efeito, se $T_1(x_1 t)$, $T_2(x_2 t)$ e $T_3(x_3 t)$ são as soluções de cada um dos problemas a uma dimensão anteriores ($i = 1, 2, 3$), a solução do problema a três dimensões (3.36 sujeito a 3.37, 3.38 e 3.39) é

$$3.43 \quad T = T_1(x_1 t) \,.\, T_2(x_2 t)\, T_3(x_3, t)$$

como fàcilmente se verifica substituindo em 3.36, 3.37, 3.38 e 3.39.

O interesse prático da simplificação é sobretudo manifesto quando a temperatura inicial é uniforme no paralelipípedo, porque então é imediato escrever 3.39 (29). Este é o caso que muitas vezes surge nas aplicações, e que aumenta a utilidade da representação gráfica adimensional das soluções a uma dimensão já anteriormente citada.

O método estende-se imediatamente ao caso do cilindro finito, e a muitos outros [1].

3.1.0.3.2 — Outros casos de simplificação resultam imediatamente do carácter linear da equação do calor, o qual permite muitas vezes obter soluções somando soluções obtidas de problemas mais simples. É o caso por exemplo de problemas com condições no contorno funções arbitrárias do tempo e outros.

Como alguns exemplos se tornam evidentes usando o cálculo operacional citar-se-ão quando abordarmos futuramente este aspecto. Exemplifica-se no entanto para um caso mais geral e complexo do que o tratado até agora, o qual permite estender o método de separação de variáveis a um modelo mais geral do que o considerado pois $Q(P) \neq 0$ e as condições no contorno não são homogéneas.

3.1.1 — Consideremos agora o caso geral de ser $Q(P) \neq 0$, isto é, do problema se exprimir por:

Determinar $T(P, t)$
Satisfazendo

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q(P)}{\rho c} \quad P \text{ em } D \text{ e } t > 0$$

sujeito a

$$3.44 \quad M(P) \frac{\partial T}{\partial n} + H(P)\, T = N(P) \quad P \text{ em } B \text{ e } t > 0$$

(com $H(P)$ não idênticamente nulo)

$$\text{e} \qquad T(P, 0) = F(P) \qquad P \text{ em } D \text{ e } t = 0$$

Neste caso, embora lineares em T tanto a equação como as condições nos limites não são homogéneas.

O processo de resolução consiste na subdivisão do problema nos dois mais simples seguintes.

Determinar $Z(P)$ tal que

$$3.45 \quad \nabla^2 Z + \frac{Q}{\rho c} = 0 \qquad P \text{ em } D$$

$$M \frac{dZ}{dn} + HZ = N \qquad P \text{ em } B$$

e $W(P, t)$ tal que

$$\nabla^2 W - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad P \text{ em } D \text{ e } t > 0$$

$$M \frac{\partial W}{\partial n} + HW = 0 \qquad P \text{ em } B \text{ e } t > 0$$

$$W = F(P) - Z(P) \qquad P \text{ em } D \text{ e } t = 0$$

como fàcilmente se verifica, a solução do problema proposto é dada por

$$3.46 \quad T(P, t) = Z(P) + W(P, t)$$

(29) Note-se que se a temperatura inicial se exprime por uma série tripla de Fourier se obtém imediatamente a forma 3.39.

O problema foi deste modo reduzido a um problema de regime estacionário — determinação de Z (P) — e a um de regime variável — W (P, t). Obtido Z (P), a determinação de W (P, t) corresponde ao problema já tratado em 3.70, que se sabe resolver.

A determinação de Z que é um problema relativamente mais simples tratar-se-á posteriormente. Aliás, como a uma dimensão é imediato, e este é o caso frequentemente necessário nas aplicações, as soluções anteriormente obtidas podem estender-se imediatamente a este caso.

3.1.1.0 — Se $H \equiv 0$, 3.44 que corresponde a impor um fluxo térmico de valor determinado no contorno, o problema pode não ter solução no âmbito do método anterior [17]. Neste caso a solução pode obter-se somando a 3.46 um termo A t, sendo A uma constante dada por

$$A = \frac{1}{\rho c v} \left[\int_B N(P)\, ds + \int_D Q(P)\, dV \right]$$

que na determinação de Z se deve somar ao segundo membro de 3.45.

3.1.2 — Conclusão

Dão-se seguidamente algumas indicações quanto à utilidade do método nos casos de aplicação. Algumas restrições foram explìcitamente indicadas na formulação do modelo. Outras referem-se a objecções de carácter prático.

Assim, quanto ao sólido, este deve:

a) Ser homogéneo (e de propriedades térmicas constantes).

b) Ser limitado (B) por superfícies coordenadas.

c) Ser limitado relativamente às coordenadas segundo as quais há variação de temperatura.

Quanto às soluções obtidas:

d) São úteis quando o número de Fourier ($t >>$) não é muito pequeno — caso contrário as séries convergem lentamente.

e) Quando o método é aplicável são quase sempre as mais fáceis de obter.

Quanto a auxiliares de cálculo:

As tabelas de raízes, ou tabelamento gráfico das soluções foram indicados já — estas existem para uma dimensão e usam-se para duas ou três dimensões quando o produto de soluções é possível. As tabelas de raízes existem para as formas simples — paralelipípedo rectângulo, cilindro, esfera e cone [1].

A bibliografia mais importante é a que se indica, a qual se ocupa exclusivamente, das formas geométricas simples — placa, paralelipípedo rectângulo, cilindro e esfera, com as restrições já indicadas, e quase sempre considerando a temperatura inicial uniforme [2, 3, 4, 13, 14, 17, 18]; é excepção [1] que considera ainda o sólido limitado por superfícies cónicas, e casos de temperatura inicial não uniforme — é uma obra clássica em matemáticas aplicadas.

Agradecimento:

— ao Ex.mo Sr. Prof. Gouvêa Portela, pelo estímulo recebido no interesse e na profundidade com que discute estes trabalhos.

BIBLIOGRAFIA

[1] — Carsláw e Jaeger — Conduction of Heat in Solids — Oxford U. P.
[2] — Max Jacob — Heat Transfer — Wiley.
[3] — Eckert, Drake — Heat and Mass Transfer — Mc Graw-Hill.
[4] — Gröber e Grigull — Grundsetze der Warmeubertragung — Springer.
[5] — De Groot — Thermodynamics of Irreversible Processes — North — Holland.
[6] — Callen — Thermodynamics — Wiley.
[7] — Prigogine Étude Thermodinamique des Phenomènes Irreversibles — Desoer.
[8] — Courant, Hilbert — Methods of Mathematical Physics — Interscience.
[9] — Prof. Carvalho Fernandes — Curso de Análise Superior (A. E. I. S. T.).
[10] — Goursat — Cours d'Analyse — Gauthier-Villars.
[11] — Prof. A. Alves — Curso de Cálculo (A.E.I.S.T.).
[12] — Prof. Gouvêa Portela — Curso de Maquinas Alternativas (A.E.I.S.T.).
— Curso de Termodinâmica (A.E.I.S.T.).
[13] — Schneider — Conduction Heat Transfer — Adison — Wesley.
[14] — Mac Adms — Heat Transmission — Mc Graw-Hill.
[15] — Heisler — Trans ASME — 1947, pag. 227.

[16] — Olson e Schultz — Industrial & Eng. Chemistry — vol. 24, 1942 — pag. 874.
[17] — Weiner Booley — Theory of Thermal Stresses — Wiley.
[18] — Ingersoll — Zobel — Ingersoll — Heat Conduction — Thames & Hudson.
[19] — Prof. Almeida Alves — A integração da equação do calor — Técnica 234 — 1953.

RESUMO

Numa sucinta introdução procura-se definir correctamente o problema da condução do calor em sólidos invocando a Termodinâmica dos Processos Irreversíveis. Expõe-se seguidamente o método de separação de variáveis de que se faz um resumo crítico relativo às vantagens e limitações na sua utilização.

SUMMARY

The heat conduction in solids is treated in a brief introduction, in the scope of Irreversible Termodinamics. Separation of variables method is then exposed, and its advantagens and limitations discussed.

Curso Adiantado de Engenharia Estrutural

Faculdade de Engenharia — Universidade de Southampton

Convidam-se todos os estudantes, devidamente qualificados, a inscreverem-se num curso de um ano de Engenharia Estrutural. Os candidatos, que terão de ser formados em Engenharia ou Matemática, ou possuirem sólidos conhecimentos destes ramos da Ciência em que desejem inscrever-se, deverão dirigir-se, o mais ràpidamente possível, à Secretaria da Faculdade de Engenharia da Universidade de Southampton.

O curso abrangerá os seguintes assuntos:

Análise de estruturas elásticas lineares
Teoria e prática do cálculo à rotura aplicada a estruturas de aço e de betão
Estabilidade e vibração de estruturas
Teoria das placas e das cascas
Análise experimental de tensões
Cálculo de fundações
Teoria da elasticidade
Métodos variacionais
Uso de computadores electrónicos.

assim como conferências sobre a Matemática relacionada com a teoria das estruturas.

Fazem também parte do curso o estudo de investigação experimental e cálculo de projectos.

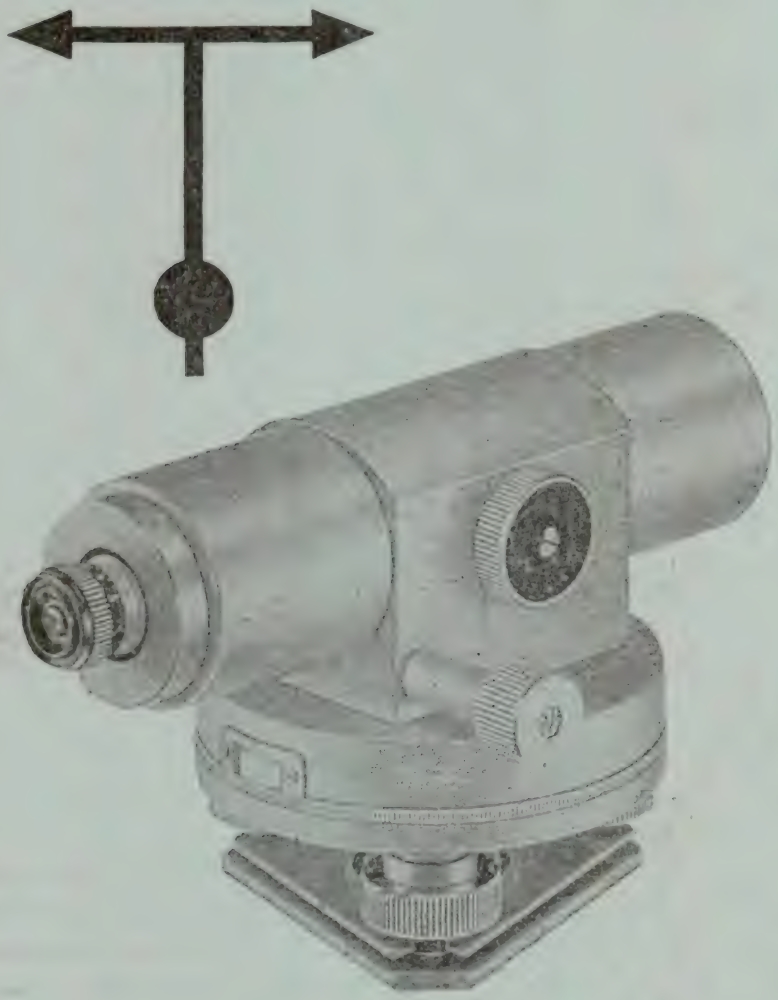
Os estudantes já formados serão submetidos a um exame em Junho e devem apresentar uma tese no fim de Setembro, sendo-lhes conferido o grau de M. Sc. (Eng.) em caso de aprovação.

Aos que frequentarem o curso com aproveitamento será atribuído um Diploma da Universidade.

As inscrições para o curso e os exames serão de 75 libras, excluindo alojamento.

O Department of Scientific and Industrial Research reconhece o curso e oferece bolsas de estudo.

NIVEL AUTOMÁTICO DE CONSTRUÇÃO



Fennel KASSEL

Moderno aparelho equipado com um sistema prismático pendular, colocando automàticamente a linha de mira na sua posição horizontal.
A simplicidade e robustez do processo utilizado e o seu grande rendimento de trabalho, tornam este aparelho excepcionalmente dotado para todos os nivelamentos técnicos.

CARACTERÍSTICAS

Luneta — Com focagem interna, óptica tratada, imagem direita. Comprimento 200 mm. Ampliação 20 x. abertura da objectiva 25 mm. Distância mínima de mira 2,5 m. Constante de adição zero. Constante de multiplicação 100

Limbo horizontal — Diâmetro 100 mm. Graduação 1° — 1 g
Leitura directa 1° — 1 g Leitura por avaliação 6" — 10c

Sensibilidade do nível esférico: 8'
Tripé extensível, caixa metálica com pequenos acessórios
Pesos: aparelho 2 kg, caixa 2,400 kg; tripé 5,200 kg

REPRESENTANTES

PAPELARIA FERNANDES — S. A. R. L.

L. DO RATO, 13 — TEL. 68 21 31/39 — R. DO OURO, 145 — TEL. 32 83 61 / 32 60 66

LISBOA

SUNWAY - Os Estores de concepção ultramoderna que graças às suas reconhecidas características de segurança, eficiência e poder decorativo são recomendados para qualquer ambiente.

Sistema revolucionário de ligação das lâminas por meio de fios de Terylene extremamente finos e de extraordinária resistência, alta qualidade de todas as partes componentes, funcionamento silencioso e facilidade de limpeza — são as características principais dos Estores «Sunway».

ESTORES **SUNWAY**

(DIVISÃO DA BELL'S & CA., LDA.)

AVENIDA GENERAL ROÇADAS, 68-C e 68-D

TELEF. 83 54 35 TELEG. SUNWAY

LISBOA 1

C. D. U. 624.138

NOTAS SOBRE A ESTABILIZAÇÃO DE SOLOS *

POR ÚLPIO NASCIMENTO

Chefe do Serviço de Geotecnia do Laboratório Nacional de Engenharia Civil

I — GENERALIDADES SOBRE A ESTABILIZAÇÃO DE TERRENOS

1 — ECONOMIA

a) — *Custo dos pavimentos*

O custo total da construção dum quilómetro de estrada pode considerar-se dividido nas seguintes parcelas: — terraplenagens e obras de arte, pavimento e obras acessórias.

Em Portugal estes custos variam dentro dos limites apresentados no quadro I.

QUADRO I

Custo de um km de estrada

(Milhares de escudos)

	Terraplenagens e obras de arte	Pavimento	Obras acessórias	Total
Estradas municipais (Largura: 5 m)	80	150	50	280
Estradas nacionais (Largura: 7 m)	300	350	200	850
Auto-estradas (Largura: 2 × 7 m = 14 m)	2500	1500	2500	6500

Custo relativo do pavimento

Estradas municipais . . .	54 %
Estradas nacionais	41 %
Auto-estradas	23 %

Quer dizer, o custo do pavimento é tanto mais importante quanto menos importante é a estrada. Daí o grande interesse do conveniente estudo dos pavimentos nas estradas de baixo custo.

O custo da conservação, que é de muito difícil avaliação, é dum modo geral tanto maior quanto mais barato é o pavimento. Nas auto-estradas esse custo será relativamente pequeno, mas nas estradas de baixo custo a conservação poderá atingir 1/4 ou 1/3 do custo da construção.

No quadro II apresentam-se as ordens de grandeza dos custos em Portugal metropolitano de

QUADRO II

Custo em escudos por m² de diferentes camadas utilizadas como fundação e camada de desgaste de pavimentos

1 — Terra estabilizada com 15 cm de espessura depois do recalque (seleccionada e homogeneizada) . . .	10$00
2 — Macadame com 15 cm de espessura depois do recalque (0,18 m³ de brita a 45$00/m³)	15$00
3 — Solo-cimento com 15 cm de espessura depois do recalque (22 kg de cimento a $70/kg)	32$00
4 — Revestimento betuminoso sobre macadame (2,6 kg de betume a 1$70/kg)	13$00
5 — Revestimento betuminoso sobre base de terra estabilizada (= a 4 + 1 l de MCO a 2$00/l)	16$00
6 — Tapete betuminoso com 4 cm de espessura (5,5 % de betume a 1$70 kg + 0,6 kg de emulsão a 1$70 kg em rega de colagem) . .	25$00
7 — Idem com 7 cm de espessura (5,5 % de betume + 0,6 kg de emulsão em rega de colagem) . .	41$00
8 — Calçada de paralelipípedos de granito (70 cubos a $25 cada + + 0,12 m³ de areia a 30$00/m³)	36$00
9 — Laje de betão de cimento de 15 cm de espessura (betão de 350 kg de cimento a $70 kg) . .	73$00
10 — Laje de betão armado de 15 cm de espessura (3,8 kg de armadura a 5$00/kg)	92$00

* Conferências realizadas em Madrid, a 9 e 10 de Janeiro de 1960, num curso de construção de estradas organizado pela Asociación Española de la Carretera.

algumas camadas utilizadas como fundação e camada de desgaste.

b) — *Capacidade de tráfego dum pavimento*

Um pavimento submetido a um dado tráfego tem uma certa duração além da qual a sua ruína se acentua progressivamente manifestando-se por *fendilhamento, ondulações, rodeiras, covas, cremamalheiras*, etc. Tem portanto uma certa *capacidade de tráfego* que se poderá medir pelo número máximo de veículos a que pode dar passagem em boas condições.

Sendo I a intensidade diária média de veículos durante um ano e D a duração útil da estrada, em anos, a capacidade do pavimento será dada pelo número total N de veículos que se obtém pela expressão

$$N = 365 \sum_{i=1}^{i=D} I_i \qquad (1)$$

Se designarmos por I' o valor médio de I ao longo de toda a duração D da estrada, à eq. (1) poderá dar-se a forma

$$N = 365\ I'\ D \qquad (2)$$

Evidentemente que esta capacidade depende fortemente da natureza do tráfego que circula na estrada, principalmente da sua carga por roda. A experiência portuguesa permite no entanto fixar no quadro III algumas ordens de grandeza de D, I' e N.

QUADRO III

Capacidade de tráfego (N) de alguns pavimentos

$N = 365\ I'\ D$

Tipos	D (anos)	I' (veículos/dia)	N (veículos)
1 — Terra estabilizada .	5 a 10	10	$2 \text{ a } 4 \times 10^4$
2 — Macadame sem revestimento	5 a 10	100	$2 \text{ a } 4 \times 10^5$
3 — Revestimento superficial sobre terra estabilizada	5 a 10	1000	$2 \text{ a } 4 \times 10^6$
4 — Revestimento superficial sobre macadame	5 a 10	1500	$3 \text{ a } 6 \times 10^6$
5 — Tapete betuminoso	10 a 20	3000	$1 \text{ a } 2 \times 10^7$
6 — Laje de betão de cimento	15 a 30	3000	$2 \text{ a } 3 \times 10^7$

c) — *Custo efectivo dos pavimentos*

O valor económico dum pavimento é medido pelo serviço que ele presta. Uma maneira genérico de medir esse serviço será pelo número de veículos que passam sobre um quilómetro da respectiva estrada, isto é, pelo número de *veículos. km* que ele pode produzir. O valor económico dum pavimento será pois o do seu custo num quilómetro de estrada, dado pela expressão

$$P = 1000\ \gamma\ p\ l \qquad (3)$$

sendo

γ — um coeficiente, para dar conta do custo da conservação, variando entre 1 e 1,3;
p — custo de um m² do pavimento (quadro II)
l — a largura da estrada em metros,

dividido pela sua capacidade, expressa pelo número máximo de veículos que por ele pode passar.

Obter-se-á assim o custo/veículo . km (c) do pavimento pela expressão

$$c = \frac{P}{N} = \frac{1000\ \gamma\ p\ l}{N} \qquad (4)$$

QUADRO IV

Custo efectivo por veículo. km de alguns pavimentos

$c = \frac{1000\ \gamma\ p l}{N}$ $(\gamma = 1;\ l = 7{,}5\ m)$

Tipo	Custo p (escudos por m²)	Capacidade N (veículos)	Custo efectivo (escudos por veículo, km)
1 — Terra estabilizada	10 a 20	$2 \text{ a } 4 \times 10^4$	2 a 8
2 — Macadame sem revestimento . .	15 a 30	$2 \text{ a } 4 \times 10^5$	0,3 a 1,1
3 — Revestimento superficial sobre terra estabilizada	25 a 35	$2 \text{ a } 4 \times 10^6$	0,05 a 0,13
4 — Revestimento superficial sobre macadame . . .	30 a 45	$3 \text{ a } 6 \times 10^6$	0,04 a 0,11
5 — Tapete betuminoso	40 a 70	$1 \text{ a } 2 \times 10^7$	0,015 a 0,09
6 — Laje de betão de cimento	80 a 100	$2 \text{ a } 3 \times 10^7$	0,02 a 0,04

No quadro IV apresentam-se algumas ordens de grandeza deste custo efectivo deduzidas dos quadros II e III, supondo uma estrada com

$l = 7{,}5$ m de largura e não entrando em consideração com os encargos de conservação ($\gamma = 1$). Por aí se verifica que os pavimentos mais caros são também os mais económicos, isto é, aqueles cujo custo efectivo por veículo . km é mais baixo; e verifica-se também que os pavimentos mais baratos são os menos económicos. As diferenças podem ir desde 2 centavos/veículo . km, nos melhores pavimentos betuminosos ou de cimento, até 8 escudos/veículo . k numa estrada de terra; quer dizer a relação entre estes custos extremos pode ir até 400 (8/0,02).

d) — *Planeamento por fases*

Poderia então parecer que as estradas de baixo custo não têm interesse económico. Há porém que entrar também em consideração com o aspecto financeiro do problema. Com efeito se o pavimento tem elevada capacidade exige um grande investimento inicial e para isso será necessário dispor de dinheiro que só poderá ser amortizado ao fim dum grande número de anos. Haverá então que somar ao custo do pavimento, os encargos com os juros do financiamento; e nestas condições já o confronto com os pavimentos de baixo custo pode ser favorável a estes.

Mas há ainda outras considerações de muita importância que dizem respeito à previsão da evolução do tráfego.

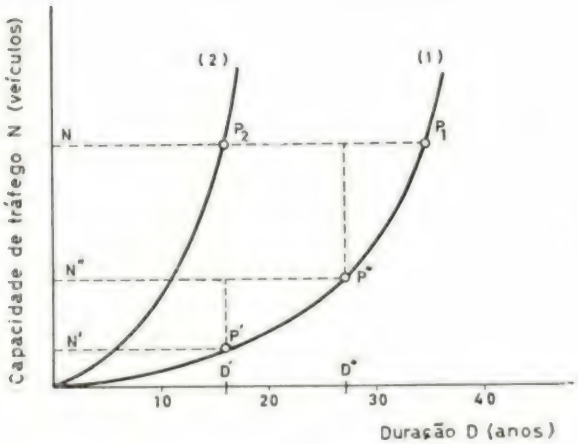


Fig. 1 — Esquema da evolução do tráfego em duas estradas, uma de pouca (1) e outra de muito tráfego (2), e da construção por fases no caso (1).

O serviço que um quilómetro de estrada vai prestando ao longo do tempo é medido pelo número de veículos . km dado pela eq. (1) o qual pode evoluir, por exemplo, conforme se representa na fig. 1, segundo as curvas (1), para estradas de pequeno tráfego, ou (2) para estradas de tráfego mais intenso.

Um bom pavimento, cujo custo efectivo é, como vimos, o mais baixo, levaria trinta ou quarenta anos a gastar toda a sua capacidade de tráfego N, se este crescer muito lentamente conforme se exemplifica com a curva (1); enquanto que se gastaria apenas em dez ou vinte anos, se o tráfego crescer ràpidamente conforme a curva (2). No caso (1) o financiamento seria a muito longo prazo o que terá os seguintes inconvenientes:

1.º — Grandes encargos com juros, o que vai elevar o custo efectivo do pavimento.

2.º — Exigir uma grande confiança na previsão da evolução do tráfego ao longo de várias dezenas de anos, o que constitui problema que ainda está longe de solução satisfatória.

Por estas razões é preferível fazer uma *construção por fases* de capacidades N' e N'' (fig. 1) e durações D' e D'' de modo que a estrada se vá adaptando por degraus ao crescimento do tráfego. O custo efectivo desta solução poderá ser maior; no entanto tem as seguintes vantagens:

1.ª — Reduz a duração de cada fase a um prazo dentro do qual são razoáveis as previsões do tráfego e os investimentos financeiros respectivos.

2.ª — Permite que a estrada, pela contribuição de cada uma das suas fases para a economia do país, vá ela própria ganhando o dinheiro que permitirá construir a fase seguinte.

É nesta construção por fases, principalmente nos territórios do ultramar em desenvolvimento, que as pavimentações com terras estabilizadas têm mais interesse.

Todavia para se poder fazer o planeamento é necessário conhecer em relação a cada fase a respectiva capacidade N e a duração D. Sabemos

nós calcular tais valores com rigor suficiente? A resposta é infelizmente negativa.

Com efeito o cálculo da capacidade de tráfego N para um dado pavimento constitui um importante problema de dimensionamento que está longe de estar resolvido, sobretudo para pavimentos que saiam fora das condições normais, como é geralmente o caso da construção por fases. Por outro lado o cálculo da duração D constitui um problema de previsão, baseado nas estatísticas de tráfego ou em planos de desenvolvimento económico, que também não se pode considerar resolvido na generalidade dos casos.

Mas então, se não conhecemos com suficiente rigor os parâmetros em que se baseia o planeamento qual é o seu interesse? O seu interesse é o de pôr o problema em equação em bases quantitativas, e isso é o primeiro passo para a sua solução.

2 — ESTUDOS, ENSAIOS E PROJECTO

O projecto duma estabilização deve ter por base os seguintes estudos:

- Reconhecimento geológico dos terrenos ao longo da estrada e até uma distância desta dentro da qual ainda se justifique a utilização económica dos respetivos materiais.
- Prospecção, amostragem, identificação e classificação dos terrenos com interesse para a obra.
- Ensaio dos materiais tendo como base a sua utilização nas possíveis soluções de pavimentação consideradas em anteprojecto como mais económicas do ponto de vista, quer da melhor utilização dos materiais da região, quer dos meios de trabalho disponíveis para a construção.
- Dimensionamento. Definida a constituição da camada de terra estabilizada e caracterizada a respectiva resistência, pelo C. B. R. por exemplo, haverá que dimensioná-la, isto é, calcular a sua espessura.

Vejamos cada um destes pontos com mais pormenor:

a) — *Reconhecimento geológico*

O reconhecimento geológico é recomendável porque define e localiza as principais formações da região referindo-as à geologia geral do país o que apresenta as seguintes vantagens:

1.ª — Permite tirar partido de elementos informativos que já existam sobre outras ocorrências da mesma formação. E, recìprocamente, facilita a futura utilização noutros trabalhos das informações que se reunam no trabalho em questão.

2.ª — Permite orientar com maior eficiência e economia a amostragem de pormenor para os estudos geotécnicos.

O reconhecimento geológico deve ser precedido da reunião da bibliografia sobre a geologia da região (cartas geológicas, monografias, etc.) e de outros elementos informativos disponíveis, tais como relatórios de sondagens feitas na região mesmo para outros fins. Com base nestes elementos e nas cartas topográficas existentes faz-se um reconhecimento no terreno, localizando e identificando, se possível, as formações dos afloramentos das trincheiras, dos barrancos, etc. Deste modo é possível estabelecer uma primeira planta onde se delimitam as zonas em que afloram as formações ou os *complexos geológicos* identificados. Pode mesmo ser possível esboçar alguns cortes geológicos de muito interesse para o estudo ulterior.

Com base no relatório do reconhecimento geológico estabelecer-se-á o plano das sondagens, dos poços e das valas de prospecção que constituem os trabalhos da fase seguinte.

b) — *Prospecção, amostragem, identificação e classificação dos terrenos*

Os principais objectivos destes trabalhos são:

1.º — Confirmar e completar as informações reunidas no reconhecimento geológico, delimitando em superfície e em profundidade as principais formações geológicas com interesse para obra.

2.º — Fazer a descrição da composição litológica e da textura e estrutura dos materiais com base no exame visual seguindo-se por exemplo a orientação da norma AASHO — T 86-49.

3.º — Fazer a amostragem, identificação e classificação geotécnica dos materiais com base na granulometria e limites de Atterberg seguindo-se por exemplo a especificação AASHO M 145-49.

Esta amostragem e identificação devem ser orientadas de maneira a poder fazer-se uma ideia da heterogeneidade dos materiais e das respectivas propriedades médias.

O poço ou a vala que permitem o exame directo dos materiais «in situ» e a sua amostragem nas melhores condições são os métodos mais recomendáveis de prospecção. Em certas circunstâncias (ocorrência de água, grandes profundidades, etc.) terá que se recorrer aos furos de sondagem.

Uma questão fundamental é a do afastamento entre si e da profundidade dos poços e sondagens de prospecção. Não me demorarei neste problema porque alongaria demasiadamente este trabalho.

c) — *Ensaios*

Os ensaios que correntemente se realizam sobre os materiais têm como principal objectivo uma primeira solução em face das especificações adoptadas. Quer dizer uma primeira avaliação do seu valor em face duma experiência prática que é geralmente divulgada e oficializada por meio de normas e especificações. Entre nós, como em muitos outros países, tomam-se como ponto de partida as especificações americanas que se vão adaptando e oficializando à medida que as respectivas técnicas se vão desenvolvendo.

Há porém que ter presente que tais especificações foram elaboradas para atender a circunstâncias, geológicas, climáticas e económicas que podem ser muito diferentes das do nosso país. Portanto, mesmo nos casos em que elas sejam aplicáveis, há que manter uma certa reserva enquanto não houver suficiente experiência acumulada através das respectivas aplicações Quando tal não sucede a melhor orientação será a de adquirir essa experiência o mais rápida e econòmicamente possível. Para isso impõe-se uma íntima colaboração entre as organizações de investigação e as organizações de construção e conservação de estradas, no sentido de se construirem numerosos e bem distribuídos troços experimentais, aproveitando para o efeito os próprios programas de construção de rede nacional, nos quais se comprovem em condições reais os projectos de especificações definidas pela investigação laboratorial.

Adiante, a propósito de cada tipo de estabilização, referirei com pormenor as respectivas especificações e ensaios.

d) — *Dimensionamento*

As duas modalidades de planeamento representadas pelas curvas (1) e (2) da fig. 1 dão também os dois casos mais correntes de utilização de camadas de terra estabilizada:

1.º — A camada está integrada num pavimento cuja duração se supõe normal de acordo com os critérios correntes de dimensionamento (C. B. R.).

2.º — A camada ou o pavimento a que ela pertence constituem uma fase cuja duração só será normal sob tráfego muito reduzido; ou então, se o tráfego for normal, terá uma duração muito breve.

Com efeito, no que diz respeito ao tráfego, os parâmetros fundamentais do dimensionamento são a *carga da roda* representativa do tráfego e o *número de repetições* dessa carga. Em primeira aproximação esse número de repetições pode considerar-se proporcional ao número total (N) de veículos que passam na estrada, isto é, à sua capacidade de tráfego dada pela eq. (2).

Os métodos de dimensionamento correntemente adoptados, designadamente o método C. B. R., não tomam em linha de conta duma forma explícita esta capacidade de tráfego, pois apenas se referem à carga da roda. Subentende-se porém que tais métodos se destinam a estradas de tráfego normal e com uma duração também normal.

Apenas para referir ordens de grandeza consideraremos normal uma duração de 15 a 20 anos com uma intensidade de 1000 a 2000 veículos por dia; teremos assim que a capacidade de tráfego das estradas mencionadas pelo C. B. R. é de 10^6 a 10^7 veículos.

$$N_{CBR} = 10^6 \text{ a } 10^7 \text{ veículos}$$

Consideremos o exemplo apresentado na fig. 2 de um pavimento dimensionado pelo C. B. R. para rodas de 5,5 ton (12 000 libras) sobre um terreno de CBR = 5. Tem que ter 45 cm de espessura total, a qual pode ser realizada por um tapete betuminoso de 7 cm, uma base de maca-

me de 13 cm e uma sub-base de terra estabilizada com CBR = 20. O C. B. R. da base tem que ser elevado, pelo menos 80, para que, de acordo com o ábaco, a espessura do tapete possa ser apenas de 7 cm. Um pavimento nestas condições terá portanto uma capacidade de 10^6 a 10^7 veículos e durará 15 a 20 anos submetido a um tráfego médio de 1000 a 2000 veículos por dia.

No entanto se a estrada nos primeiros anos tiver um tráfego muito pequeno, poderá justificar-se a construção por fases como exemplificámos na fig. 1 (curva 2).

Suponhamos que são as três seguintes fases:

1.ª fase — Sub-base de terra estabilizada com revestimento superficial betuminoso.
2.ª fase — Regularização e recarga com macadame e revestimento betuminoso.
3.ª fase — Regularização e recarga com tapete betuminoso.

Voltemos porém à fig. 2 e consideremos o problema concreto do dimensionamento duma camada de terra estabilizada quando constitui a 1.ª fase.

Se dermos à camada toda a espessura de 45 cm que o terreno de fundação requer não se satisfaz o método do C. B. R. nos 20 cm de superfície visto que aí são requeridos materiais com C.B.R. superior a 20 e tanto maiores quanto mais próximo da superfície eles se encontram (fig. 2). A terra estabilizada será portanto ràpidamente desagregada dando lugar a rodeiras, lamas, poeiras, cremalheiras, etc. E como consequência disso a sua espessura começa a ser diminuida à custa da acumulação de materiais nas bermas.

Se dermos à camada apenas os 25 cm que lhe virão a corresponder de futuro ela será desagregada na mesma, mas com a grande agravante de tal espessura ser insuficiente para o C. B. R. do terreno de fundação, o que implica uma redução apreciável da sua capacidade de tráfego e portanto a eventual destruição de todo o pavimento desde a sua base, impedindo pois o seu aproveitamento para as fases futuras.

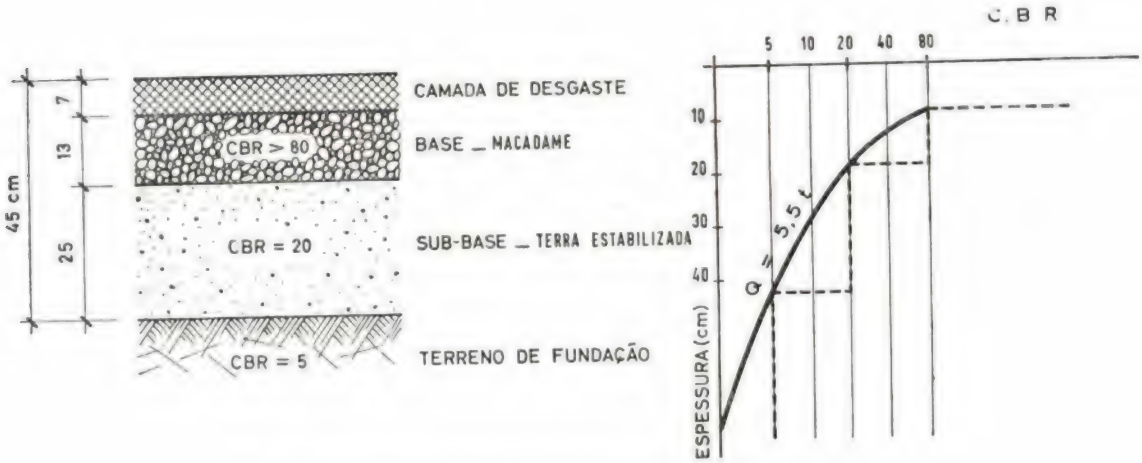


Fig. 2 — Exemplo de dimensionamento de pavimentos pelo C. B. R.

A solução a adoptar em cada caso, que depende evidentemente das respectivas circunstâncias, pode localizar-se entre as duas seguintes situações extremas:

1.ª — A camada tem apenas a espessura que lhe corresponderá como sub-base do futuro pavimento depois de construídas todas as fases (25 cm no exemplo da fig. 2).

2.ª — A camada tem, pelo menos, a espessura requerida pelo C. B. R. da fundação (45 cm no exemplo da fig. 2).

A construção das fases seguintes conduzirá portanto a um pavimento sobredimensionado.

Todavia, em qualquer dos casos, como não conhecemos nem a capacidade N nem o número de anos D que ela levará a ser atingida, não sabemos também «à priori» qual será o momento em que será necessária a construção da 2.ª fase. Aliás essa necessidade da 2.ª fase pode ser consideràvelmente retardada se houver uma cuidadosa conservação e mesmo trabalhos de protecção.

A boa orientação parece ser a seguinte:

1.º — Manter permanentemente a estrada sob cuidadosa e sistemática observação.

2.º — Realizar sem demora os trabalhos de conservação e de protecção sempre que necessários. Uma despesa feita a tempo pode poupar futuras despesas muito mais avultadas.

3.º — Construir a fase seguinte antes que a ruína seja tão profunda que a torne inutilizável como fundação, sendo portanto necessário levantá-la e refazer todo o pavimento desde o terreno de fundação.

II — ESTABILIZAÇÃO MECÂNICA

1 — *Especificações*

A estabilização mecânica é aquela que se obtém apenas por operações de carácter mecânico, tais como *lavagem, crivagem, britagem, mistura, hamogeneização* e *compactação* dos materiais.

Pretende-se melhorar a sua *resistência* às solicitações do tráfego e diminuir a susceptibilidade dessa resistência às *variações de humidade.*

A resistência mecânica depende principalmente da compacidade: — quanto mais elevado for o peso específico aparente dum terreno maior será a sua resistência. E essa compacidade depende principalmente da granulometria.

A susceptibilidade à humidade é devida à expansibilidade dos finos do terreno provocada pela absorção de água, pois esse aumento de volume, diminuindo a capacidade, diminui a resistência. Anàlogamente a excessiva retracção dos finos por secagem pode também provocar grande queda da resistência e a consequente desagregação do material. No primeiro caso o terreno forma lama; no segundo caso forma poeiras. A estabilização tem que evitar uma coisa e outra. Vejamos como.

a) — *Granulometria*

Quanto à granulometria, está averiguado serem aquelas que se aproximam das do tipo Fuller ou Talbot as que conduzem ao maior peso específico aparente. No entanto, para melhorar a coesão, a quantidade passada no peneiro n.º 200 tem que ser aumentada. Do ponto de vista das aplicações práticas a especificação ASTM D 1241-55 T define vários fusos granulométricos para dois tipos de materiais: o tipo I com 4 variedades (A, B, C e D) de materiais mais grosseiros que poderemos designar por *betão de solo* e o tipo II, com duas variedades de materiais mais finos (E e F), que poderemos designar por *argamassa de solo.*

Na fig. 3 apresentam-se esses fusos para as quatro variedades de betões de solo (A, B, C e D) e na fig. 4 as duas variedades de argamassas de solo (E e F). Além das limitações destes fusos, impõe ainda a mesma especificação ASTM que a quantidade de finos passando no peneiro n.º 200 (0,074 mm) não exceda 2/3 da quantidade que passa no peneiro n.º 40 (0,42 mm). No entanto, se se tratar duma camada de desgaste, essa quantidade de finos passados no peneiro n.º 200 não pode ser inferior a 8 %.

b) — *Plasticidade*

O comportamento perante a água é controlado por meio dos limites de Atterberg. Impõe-se que a fracção passando no peneiro n.º 40 tenha

$$LL < 25 \quad e \quad IP < 6$$

No entanto, tratando-se duma camada de desgaste, deverá subir-se o limite superior e limitar inferiormente a plasticidade para evitar a desagregação e as poeiras

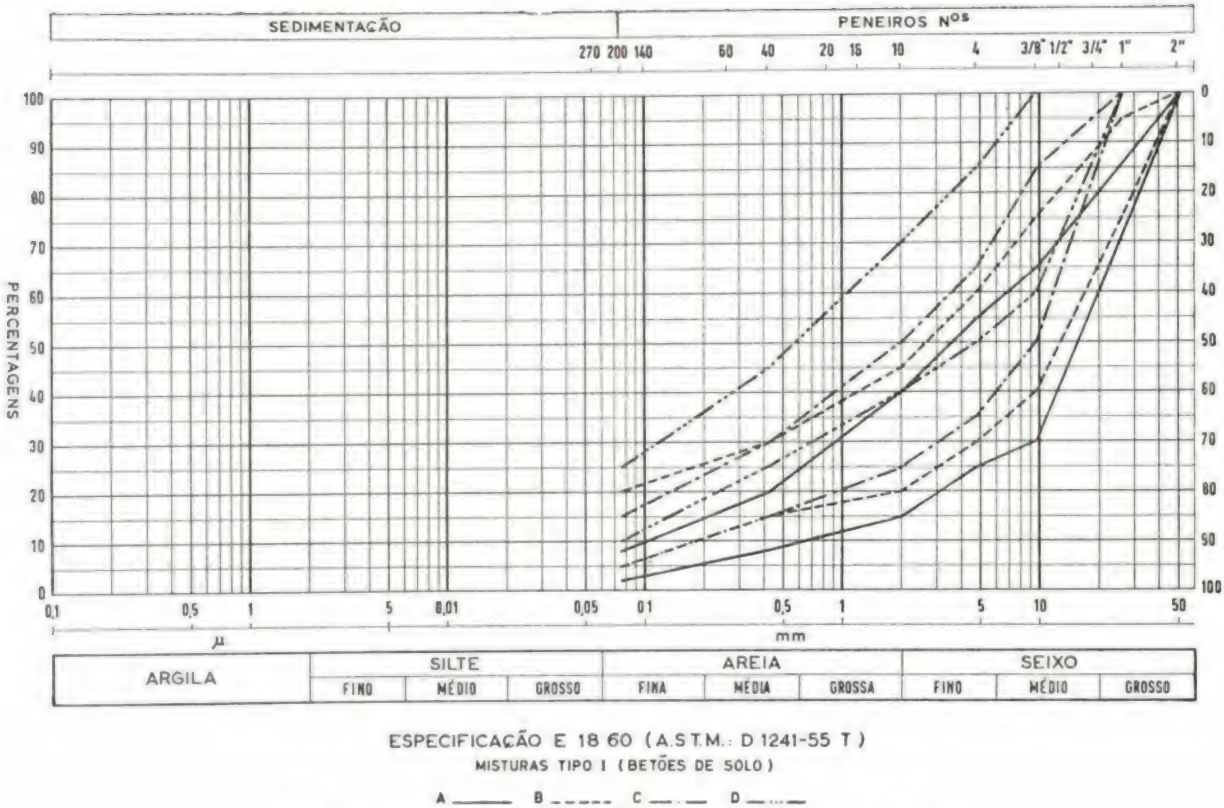
$$LL < 35 \qquad IP = 4 \text{ a } 9$$

c) — *Dureza do agregado grosso*

Quanto à dureza do agregado exige-se ainda que o material retido no peneiro n.º 10 (2 mm) tenha um desgaste na máquina de Los Angeles não superior a 50 %.

d) — *Resistência e compactação*

O método mais divulgado para a avaliação da resistência dum terreno para efeitos de dimensionamento de pavimentos é o do C. B. R. Dado um terreno satisfazendo às especificações de granulometria e plasticidade referidas anteriormente, há pois que avaliar qual deverá ser o C. B. R. a adoptar no projecto tendo bem em atenção as circustâncias especiais e o equipamento com que se vai realizar a compactação que terá de garantir o referido C. B. R.

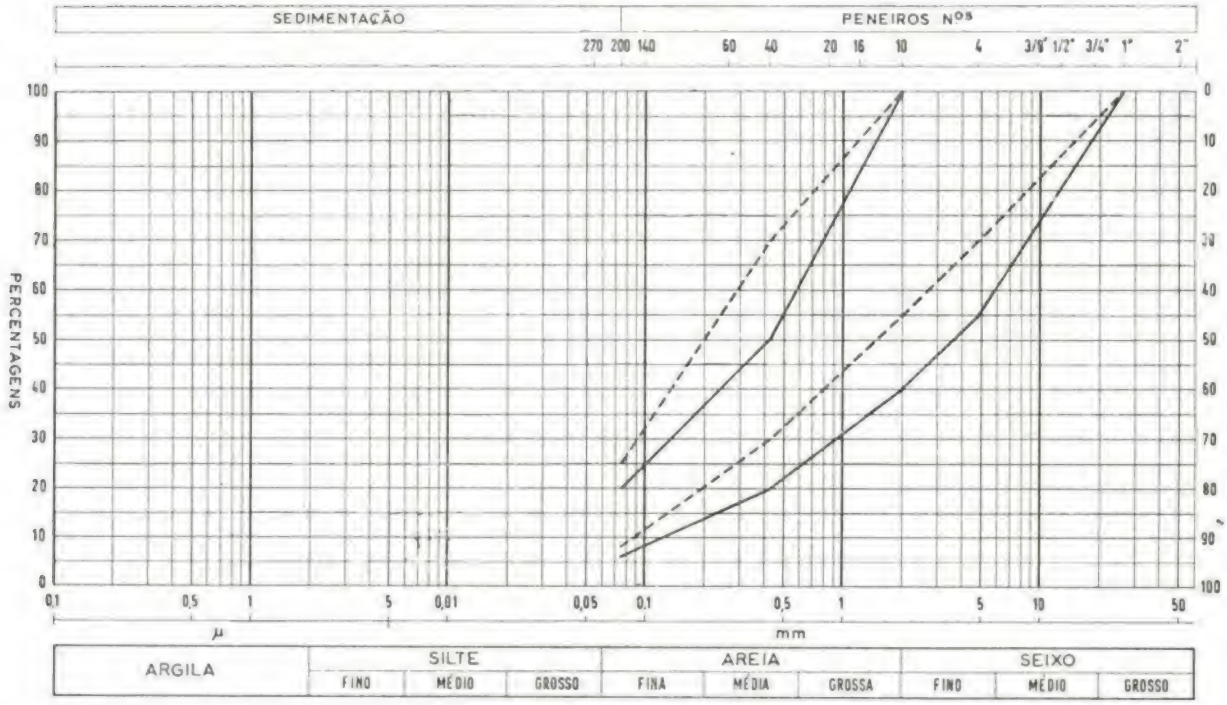


ESPECIFICAÇÃO E 18 60 (A.S.T.M.: D 1241-55 T)

MISTURAS TIPO I (BETÕES DE SOLO)

A ——— B - - - - - C —·— D —··—

Fig. 3 — Especificação A S T M : D 1241-55 T para betões de solo



ESPECIFICAÇÃO E 18 60 (A.S.T.M.: D 1241-55 T)

MISTURAS TIPO II (ARGAMASSAS DE SOLO)

E ——— F - - - - - - -

Fig. 4 — Idem para argamassa de solo

AÇO TOR

O AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA
PARA BETÃO ARMADO COM
MAIOR VENDA NO MUNDO

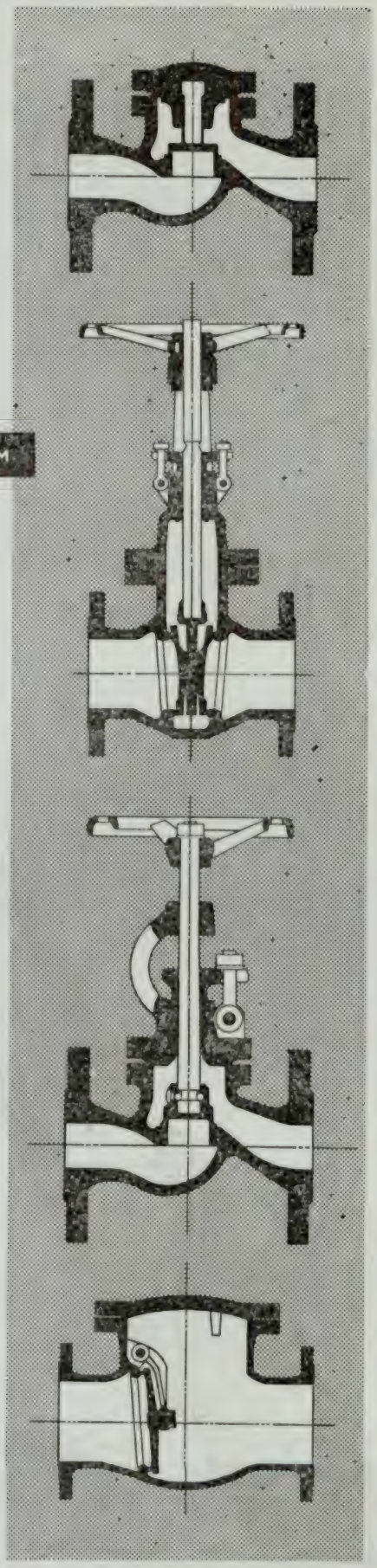
TENSÃO DE SEGURANÇA 2 400 Kg/cm²
SEM GANCHOS

Especifique
AÇO TOR
com o símbolo

SOABAL – SOCIEDADE DE AÇOS PARA BETÃO ARMADO, LDA.
RUA JOAQUIM BONIFÁCIO, 2, 1.º — TELEF. 4 05 66 — LISBOA

válvulas

- passagem
- retenção
- regulação
- cunha



PARA LÍQUIDOS, VAPORES E GASES (INCLUINDO NH_3 E SO_2) EM

ferro fundido
ferro fundido com grafite esferoidal
aço vasado
aço inoxidável

DN 10 mm até 600 mm **PN 6 a 40 kg/cm²**

conforme as normas **DIN** e **ASA**

VÁLVULAS DE SEGURANÇA, DE REDUÇÃO, ELECTROMAGNÉTICAS E VÁLVULAS ESPECIAIS

- estudos
- projectos
- orçamentos
- assistência técnica

SOCIEDADE PORTUGUESA DE VÁLVULAS, LDA.

RUA DA ACADEMIA DAS CIENCIAS, 5 — LISBOA 2

TELEFONE: PPCA 31710—5 LINHAS

Os principais factores de que depende a resistência do terreno avaliada pelo C. B. R. são a *dimensão máxima* da sua granulometria, o seu *grau de compactação* e a sua *humidade*.

Examinemo-los sumàriamente:

1.º — *Dimensão máxima*

Em relação ao 1.º factor, enquanto que as especificações granulométricas consentem, como vimos, estabilizações com terrenos até 2", o ensaio C. B. R. não pode ser feito com partículas maiores do que 3/4". Todo o material retido no peneiro de 3/4" tem que ser substituído por igual peso de material passado no 3/4 e retido no n.º 4.

O material ensaiado em laboratório pode, em certos terrenos mais grosseiros, ter cerca de 40 % dos seus elementos mais grossos (superiores a 3/4") substituídos por partículas mais finas (inferiores a 3/4").

Por esta razão no Laboratório Nacional de Engenharia Civil está em estudo a possibilidade de ensaiar materiais sem limite de dimensões utilizando-se para o efeito moldes de grandes dimensões com diâmetros de 30, 46 e 60 cm (fig. 5).

O diâmetro do molde terá que ser cerca de 3 vezes o diâmetro da placa de carga e este, por sua vez, cerca de 3 vezes a maior dimensão das partículas do terreno.

Um terreno com partículas de 2" (5 cm) exigirá portanto um molde de $(3 \times 3) \times 5 = 45$ cm de diâmetro e uma placa de carga de pelo menos 15 cm de diâmetro.

O resultado do ensaio é dado pelo *módulo de resistência* (3) obtido pela expressão

$$R = \frac{\sigma d}{\delta} \qquad (5)$$

sendo

R — módulo de resistência (kg/cm²)

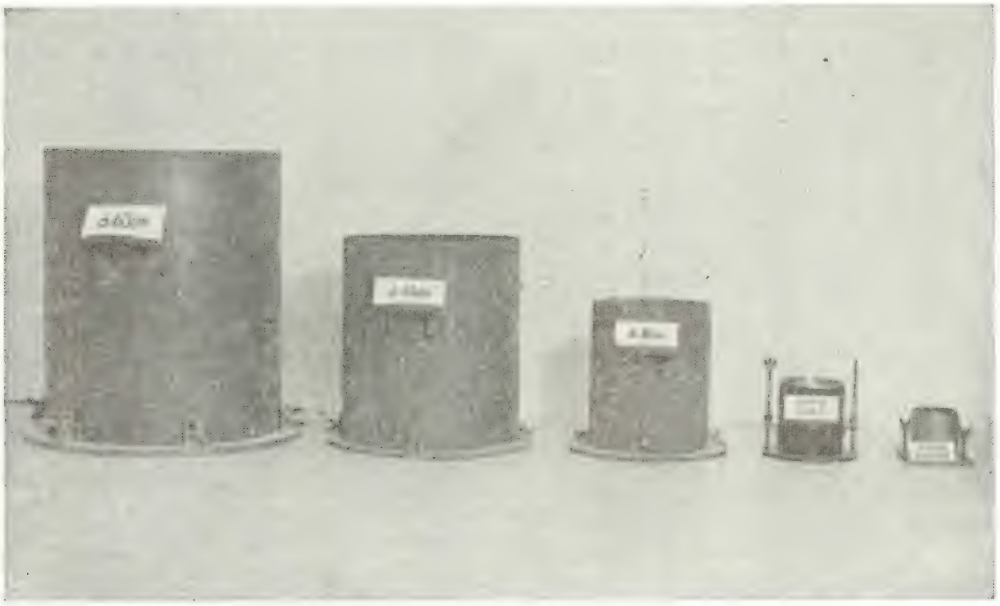


Fig. 5 — Moldes com diâmetros de 15 (C.B.R.), 30, 46 e 60 cm para ensaio de terrenos e agregados com dimensões máximas de 19, 35, 55 e 75 mm, respectivamente

Esta limitação resulta das dimensões do molde C. B. R. e do diâmetro do respectivo pistão em relação ao tamanho das partículas. A resistência do material é avaliada por defeito e portanto o erro que se comete está do lado da segurança.

Esta limitação não permite porém tirar todo o partido que se poderia tirar de materiais mais grosseiros e de maior resistência.

σ — tensão exercida sobre a superfície de terreno (kg/cm²)

d — diâmetro da placa de carga (cm)

δ — assentamento da placa para a tensão σ (cm)

A relação do módulo de resistência com o C. B. R. é sensìvelmente a seguinte:

$$R = (20 \text{ a } 30) \times \text{C. B. R.} \qquad (6)$$

QUADRO V

Tipos de ensaio de compactação segundo as normas ASTM

Material passado no peneiro	Molde de 4,584" de altura	Compactação ligeira ASTM D 698-58 T Pilão: 5,5 libras; Queda: 12"			Compactação pesada ASTM D 1557-58 T Pilão: 10 libras; Queda: 18"		
		Tipo	N.º de camadas	N.º de pancadas / cam.	Tipo	N.º de camadas	N.º de pancadas / cam.
N.º 4 (4,76 mm)	diâmetro: 4"	A	3	25	A	5	25
	diâmetro: 6"	B	3	56	B	5	56
3/4" (19,1 mm)	diâmetro: 4"	C	3	25	C	5	25
	diâmetro: 6"	D	3	56	D	5	56

2.º — *Grau de compactação*

O grau de compactação pode ser dado em relação ao ensaio de *compactação ligeira* ou ao ensaio de *compactação pesada*, geralmente designado por ensaio AASHO modificado.

Recentemente a ASTM normalizou esses ensaios permitindo que tanto a compactação ligeira como a pesada sejam feitas no molde de 4" ou de 6" e ainda, com material passado no peneiro n.º 4 ou, no peneiro 3/4". Há portanto oito tipos de compactação que se resumem no quadro V.

A qual destes tipos deve ser referido o grau de compactação?

As compactações dos tipos A e B (N.º 4) estarão mais adaptadas para os terrenos finos do tipo II, enquanto que as compactações dos tipos C e D (3/4") responderão melhor nos terrenos mais grosseiros do tipo I.

Quanto ao tamanho do molde de compactação, parece haver algumas vantagens no molde maior, principalmente para os terrenos mais grosseiros. Uma dessas vantagens será uma mais estreita relação entre os ensaios de compactação e os ensaios C. B. R.

O tipo de compactação a adoptar, ligeira ou pesada, é, em princípio, indiferente visto que o ensaio apenas constitui um padrão de referência, não limitando em nada a compactação a realizar no campo. Se a compactação escolhida for a ligeira pode exigir-se por exemplo um grau de compactação não inferior a 100 %; se for a pesada bastará, possìvelmente, exigir 90 %. Note-se porém que não há uma equivalência geral entre os graus referidos a um e outro tipo de compactação: cada terreno terá a sua equivalência que os respectivos ensaios poderão estabelecer.

3.º — *Humidade*

O C. B. R. dum terreno desce em regra muito ràpidamente quando a sua humidade aumenta. Por isso o ensaio é geralmente feito depois da amostra ter estado mergulhada em água durante quatro dias. Pretende-se assim reproduzir no laboratório as piores condições em que o terreno se pode encontrar na estrada.

Em certos casos, porém, em que haja boas condições de protecção e drenagem do terreno, bastante experiência na região ou estudos especiais suficientemente desenvolvidos, poderão tomar-se valores do C. B. R. correspondentes ao terreno com menor embebição.

2 — *Projecto duma estabilização mecânica*

O projecto duma estabilização mecânica deve estabelecer todas as características a que deverá satisfazer a obra e, além disso, definir a maneira pela qual se controlarão essas características. As principais características a definir são a *homegeneidade*, a *granulometria*, a *plasticidade*, o *peso específico aparente* e a *espessura* da camada a estabilizar; e as operações respectivas serão a *homogeneização*, a *correcção granulométrica*, a *correcção da plasticidade*, e a *compactação*. Analisemo-las sumàriamente:

a) — *Homogeneização*

Uma das principais características que se exige

dum pavimento é a sua *regularidade*, isto é, o perfeito desempeno da sua superfície, e que ela ao longo do tempo se deforme igualmente em toda a sua extensão sem provocar covas e ondulações. Grandes variações de resistência de ponto para ponto do terreno provocam diferentes assentamentos perante o tráfego e portanto a irregularidade do pavimento.

Que haja locais de elevada resistência pouco interessa, se a pequena distância há outros de baixa resistência. É mesmo preferível uma resistência média baixa mas homogénea do que uma mais elevada mas heterogénea.

Como definir a homogeneidade ?

O assentamento provocado por uma roda num pavimento é pràticamente o resultado da deformação dum volume de terreno cujas dimensões são em diâmetro e altura 2 a 3 vezes o diâmetro da área carregada. Como a estrutura do pavimento distribui as cargas na fundação este diâmetro da área carregada é maior do que o diâmetro da área de contacto do pneu que anda por 20 a 30 cm.

O volume do terreno deformado tem pois a dimensão de 0,5 m a 1,0 m.

Numa primeira análise muito grosseira pode admitir-se que os assentamentos são inversamente proporcionais ao C. B. R. e portanto escrever.

$$\delta = \frac{C}{C.B.R.} \quad (cm) \qquad (7)$$

C — É uma constante cujo valor depende da pressão do pneu e do diâmetro da área de contacto.

O seu valor em ordem de grandeza poderá deduzir-se das expressões (5) e (6)

$$C = \frac{\sigma d}{20 \text{ a } 30} \quad cm$$

para $\sigma = 5$ kg/cm² e d = 30 cm

$$C = \frac{5 \times 30}{20 \text{ a } 30} = 5 \text{ a } 8 \text{ cm}$$

Entre pontos do terreno afastados de dx haverá um assentamento diferencial ou *irregularidade* $d\delta$ cuja expressão se obtém derivando (7)

$$d\delta = \frac{C}{(C.B.R.)^2} d\,(C.B.R.) \qquad (8)$$

Daqui se tira que as diferenças de C. B. R. entre pontos afastados de *dx* não poderão ser superiores a

$$d\,(C.B.R.) \leqslant \frac{(C.B.R.)^2}{C} \cdot d\delta \qquad (9)$$

para que as irregularidades entre os mesmos pontos afastados de *dx* não sejam superiores a $d\delta$.

Exemplifiquemos:

Admitamos que dx = 1 m e que não queremos que $d\delta$ seja maior de que 1 mm. Será

$$d\delta \leqslant 0{,}1 \text{ cm}$$

Suponhamos que o C. B. R. médio é de 10, e ter-se-á que

$$d\,(C.B.R.) = \frac{10^2}{5} \times 0{,}1$$

$$d\,(C.B.R.) \leqslant 2$$

Quer dizer, em pontos afastados de 1 m o C. B. R. não pode variar mais do que 2, isto é, de 20 % em relação à média.

Mas se o C. B. R. for de 50 já as diferenças poderão ser de

$$\frac{50^2}{5} \times 0{,}1 = 50$$

quer dizer 100 % em relação à média. A homogeneidade terá portanto que ser tanto maior quanto pior for o terreno.

Não tenho conhecimento de especificações que definam como esta homogeneidade há-de ser avaliada. No entanto a orientação que se vai definindo em Portugal (14) é a da aplicação ao problema dos métodos estatísticos de amostragem e ensaio. Os parâmetros a definir em cada caso serão:

— Espaçamento da amostragem
— Propriedades a determinar em cada amostra
— Valores médios e máximas dispersões consentidas para tais propriedades.

Enquanto porém tais especificações estatísticas não se encontrem definidas parece recomendável proceder sistemàticamente a uma homogeneização dos materiais não só da base e sub-base como também da plataforma da estrada («subgrade»). Esta homogeneização da plataforma é particularmente importante nas zonas de escavação, visto que nas zonas de aterro já houve alguma homogeneização nas operações de escavação, transporte, descarga e compactação.

A homogeneização pode consistir numa simples escavação, mistura e recompactação dos materiais no mesmo sítio. A profundidade a que deve ser levada esta escavação é muito variável de especificação para especificação. Nas diferentes regiões dos Estados Unidos da América vai-se desde 15 cm (6") a 75 cm (30") (4).

A compactação exigida para esta plataforma é dum modo geral 95 % da compactação ligeira (AASHO T99); mas há no entanto estados que exigem 100 % e mesmo 95 a 105 %, e outros que se contentam com 90 a 95 % (4).

b) — *Correcção granulométrica*

Para se conseguir que um material satisfaça a uma dada especificação granulométrica pode ser necessário corrigir a sua granulometria. Essa correcção poderá revestir-se das seguintes formas:

1.º — Subtracção duma dada fracção granulométrica.

2.º — Adição e mistura de outros materiais.

A mera avaliação das granulometrias de material a subtrair ou a adicionar não oferece qualquer dificuldade, uma vez conhecidas as curvas granulométricas dos diferentes materiais utilizáveis. São problemas que se resolvem algèbricamente ou gràficamente com base nas curvas granulométricas ou na representação triangular.

O que oferece dificuldades é projectar a maneira de efectuar a correcção de tal modo que o seu custo seja aceitável em face doutras possíveis soluções do problema. Na sua generalidade o problema é muito complexo para poder ser abordado de maneira sistemática numa simples conferência.

Resumidamente ele pode esquematizar-se conforme se apresenta no Quadro VI.

c) — *Correcção da plasticidade*

Dados dois solos de índices de plasticidade K_1 e K_2, respectivamente, em que proporção os deveremos misturar para obter um material com um dado índice de plasticidade K?

Este problema pode ser aproximadamente resolvido pelo método de Pimentel dos Santos (5) o qual consiste na aplicação da seguinte fórmula:

$$K = \frac{A_1 a_1 K_1 + A_2 a_2 K_2}{A_1 a_1 + A_2 a_2} \qquad (10)$$

na qual:

— A_1 e A_2 = fracções em que os dois solos entram na mistura ($A_1 + A_2 = 1$)

— a_1 e a_2 = constantes granulométricas dos solos a misturar definidas pela seguinte expressão:

$$a = \frac{\Sigma Y}{100\ n} \qquad (11)$$

na qual

— Y = ordenadas da curva granulométrica (percentagens do material que passa) correspondentes aos peneiros B. S. 200, 100, 52, 25, 14 e 7 ou os correspondentes americanos.

QUADRO VI

Correcções granulométricas de terrenos

Subtracção duma fracção granulométrica	Pedras e calhaus (> 60 mm)	Crivagem mecânica ou escolha manual, seguida ou não de britagem mecânica ou manual
	Seixos e areias	Crivagem mecânica ou manual
	Areia fina, silte e argilas	Por *via seca* mediante secagem, desagregação e crivagem; ou por *via húmida* mediante lavagem e crivagem
Adição duma íracção granulométrica	Seixos e areia	Desagregação do terreno e mistura do correctivo
	Areia fina, silte e argila	Desagregação do terreno e do correctivo e respectiva mistura

— n = número de ordenadas (no caso referido = 6).

A mesma fórmula permite também a previsão do limite de liquidez de mistura desde que K_1 e K_2 representem as L. L. dos solos a misturar.

Por este método podem portanto calcular-se as proporções em que se deverão misturar os solos disponíveis mas que tenham plasticidade em excesso ($IP > 6$) ou em defeito ($IP < 4$) de modo a conseguir-se uma mistura que satisfaça as especificações.

Modernamente utilizam-se outros processos de corrigir a plasticidade pela adição de cal ou cimento a que mais adiante me referirei.

d) — *Compactação*

Uma compactação pode ser definida especificando o mínimo grau de compactação a obter depois de feita a compactação ou fixando a maneira como essa compactação deve ser feita (espessura das camadas, tipo e peso do cilindro, número de passagens, etc.).

As especificações mais correntes são do 1.º tipo; antigamente, porém, só havia especificações do 2.º tipo.

Qual deverá ser o grau de compactação a especificar no projecto da obra?

Como regra deverá especificar-se um grau de compactação que tire o maior partido da racional aplicação dos equipamentos usuais.

Um dado equipamento, cujas principais características são o tipo de roda (roda lisa, pneus, pés de carneiro e o piso total), compactando camadas de espessura não superior a 20 cm realiza pràticamente as suas possibilidades de compactação ao fim de cerca duma dezena de passagens. Nessas condições, dado um terreno e um equipamento de compactação utilizado com eficiência e economia pode, em princípio, traçar-se no campo uma curva de compactação como a que se realiza no ensaio de laboratório. Haverá portanto no campo um peso específico aparente máximo e uma humidade óptima tal como no laboratório. A este resultado corresponde um certo custo. Querendo-se um grau de compac-

QUADRO VII

Comparação das máximas baridades secas (γ) e dos teores óptimos de humidade (w) obtidos em ensaios de compactação de laboratório e de campo. Baseada em resultados obtidos pelo Road Research Laboratory

	Argila		Argila siltosa		Areia argilosa		Areia		Seixo areno-argiloso	
	γ (g/cm³)	w (%)	γ (g/cm³)	w (%)	γ (g/cm³)	w (%)	γ (g/cm³)	w (%)	γ (g/cm³)	w (%)
a) — *Ensaios de laboratório*										
Compactação ligeira (AASHO normal)	1,56	26	1,66	21	1,84	14	1,94	11	2,06	9
Compactação pesada (AASHO modificado)..	1,80	17	1,92	14	2,05	11	2,08	9	2,21	7
Relações de γ e w (comp. pes./comp. lig.)	1,18	0,65	1,18	0,67	1,12	0,78	1,07	0,82	1,07	0,78
b) — *Ensaios de campo*										
Cilindro de roda lisa (8 ton.)	1,66	20	1,78	16	1,86	14	2,11	8	2,21	7
Cilindro de pneus (12 ton.)	1,57	25	1,66	20	1,73	19	2,03	11	2,02	7
Cilindro de pés de carneiro (4,5 ton.)	1,72	15	1,84	14	1,92	12	—	—	2,05	5

tação bastante maior não é geralmente económico diminuir a espessura das camadas nem aumentar excessivamente o número de passagens. Terá portanto que se mudar de equipamento adoptando possìvelmente outro mais pesado. O novo custo desta compactação será porém mais elevado.

No quadro VII com base em ensaios feitos pelo Road Research Laboratory de Londres (6) comparam-se as características de compactação, máxima baridade seca e teor óptimo de humidade, obtidas em cinco solos em ensaio de laboratório, de compactação ligeira e pesada, e em ensaio de campo com equipamento corrente, cilindro de roda lisa de 8 ton., cilindro de pneus de 10 ton. e cilindro de pés de carneiro de 4,5 ton. Por aí se vê que com tais equipamentos se obtêm graus de compactação à volta de 100 % em relação à compactação ligeira e que portanto é razoável fazer essa exigência nos cadernos de encargos.

QUADRO VIII

Comparação das máximas baridades secas (γ) e dos teores óptimos de humidade (W) obtidos nos ensaios de laboratório e de campo. Baseada em resultados obtidos no Waterways Experiment Station

	γ (g/cm³)	W (%)
a) — *Ensaio de laboratório*		
Compactação ligeira (AASHO normal)	1,72	17,5
Compactação intermédia (10 libras, 18", 5 camadas, 26 p./camada)	1,79	16
Compactação pesada (AASHO modificado) Relações de γ e W com. pes./comp. lig.	1,88	14
b) — *Ensaio de campo* (16 passagens) . . . . . , ...	1,10	0,80
Cilindro de pneus de 29 t (3,5 kg/cm²)	1,74	19
Cilindro de pneus de 45 t (6,3 kg/cm²)	1,78	17
Cilindro de pneus de 57 t (10,5 kg/cm²)	1,88	15

Mas vê-se também que, com excepção dum caso (cilindro de roda lisa em seixo areno-argiloso), nunca se conseguiu obter 100 % da compactação pesada. Aliás pelo mesmo quadro se vê que 100 % da compactação pesada corrresponde a 118 % da compactação normal para os terrenos argilosos, 112 % para a areia argilosa e 107 % para as areias e seixos.

Mudando de equipamento, por exemplo para cilindros de pneus de cerca de 29, 45 e 57 ton., obteve a U. S. Corps of Engineers nos ensaios efectuados no Waterways Experiment Station (7) numa argila os resultados que se resumem no quadro VIII. Verifica-se aqui que sòmente se atingiu 100 % da compactação pesada com o cilindro mais pesado.

Estes dois exemplos dão uma ideia do que é razoável exigir dum dado equipamento e de quanto custa essa exigência.

e) — *C. B. R.*

Acabamos de fazer uma ideia de quanto custa subir as exigências de compactação. Para julgar da necesssidade dessa exigência torna-se necessário saber avaliar os benefícios que dela resultam. O método prático para atingir esse fim é por intermédio do C. B. R. Quanto maior é a compactação, maior será o C. B. R. e portanto menor a espessura do pavimento necessário. O custo desta diminuição de espessura do pavimento será portanto a contrapartida do excesso de custo da compactação.

Para se avaliarem as vantagens das possíveis soluções torna-se necessário conhecer a influência no C. B. R. dum aumento do grau de compactação. Como essa relação varia de terreno para terreno torna-se necessário para cada caso fazer vários ensaios com diferentes energias de compactação, determinando o respectivo C. B. R. Na fig. 6 exemplifica-se a maneira de fazer essa avaliação com base em três energias de compactação segundo preconiza o U. S. Corps of Engineers (8). O C. B. R. pode avaliar-se por interpolação. Assim para uma compactação de 95 % do AASHO modificado ter-se á um C. B. R. de cerca de 10 % enquanto que com uma compactação de 85 % AASHO modificado não se obterá mais do que um C. B. R. de 4 %. A diferença de espessura de pavimento correspondente é de 48 — 28 = 20 cm, o que é como se vê muito importante.

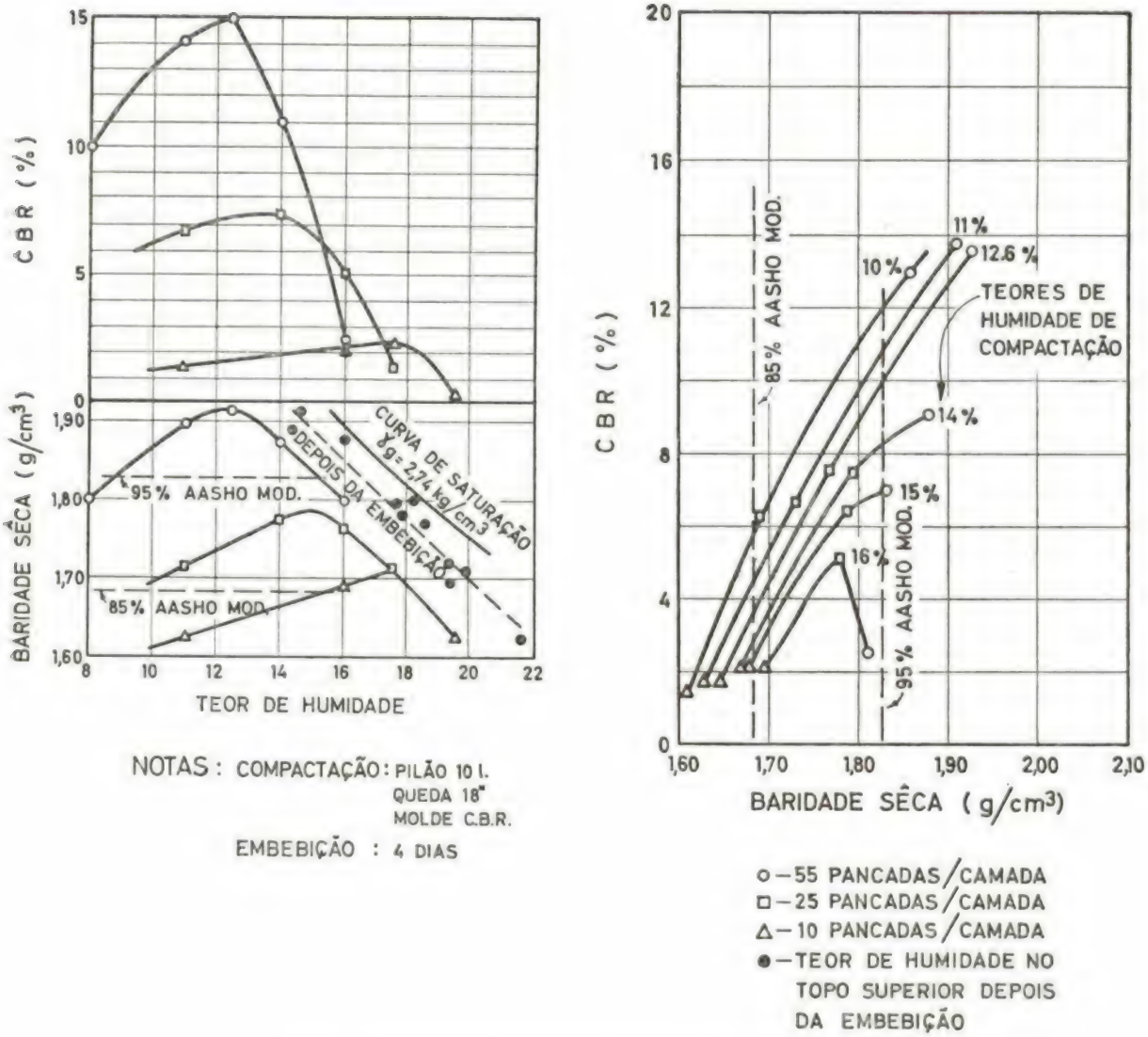


Fig. 6 — Exemplo da maneira de avaliar o C.B.R. do projecto

3 — *O caso das laterites*

Os materiais lateríticos ocorrem com grande frequência nas regiões tropicais e são por vezes os únicos materiais disponíveis em grandes extensões.

Nos materiais lateríticos distinguimos (2) as *laterites* em cascões ou concreções pisolíticas; os *solos lateríticos*, cuja fracção argilosa tem uma relação molecular $S_i O_2 / R_2 O_3 < 2$ e os *terrenos lateríticos*, nos quais há uma quantidade significativa de laterites ou de solos lateríticos.

Na fig. 7 mostra-se a constituição química da fracção argilosa dos solos lateríticos.

Estes solos lateríticos apresentam plasticidades relativamente elevadas e seriam regeitados em face da especificação americana. Verificou-se no entanto que mesmo com elevada plasticidade eles se comportam relativamente bem. Dada a importância do problema para o Ultramar português, principalmente para Angola e Moçambique, fez-se um estudo do problema (2) visando o estabelecimento de umas especificações.

Verificou-se nesse estudo que tais solos apresentam uma pequena expansibilidade quando ensaiados no material que passa no peneiro N.º 40, que é o mesmo material em que são feitos os limites de Atterberg. Na fig. 8, compara-se a sua expansibilidade com a de solos da região de Lisboa. Verifica-se que os solos lateríticos têm geralmente uma expansibilidade inferior a 5 %, mesmo com I. P. que para os solos de Lisboa cor-

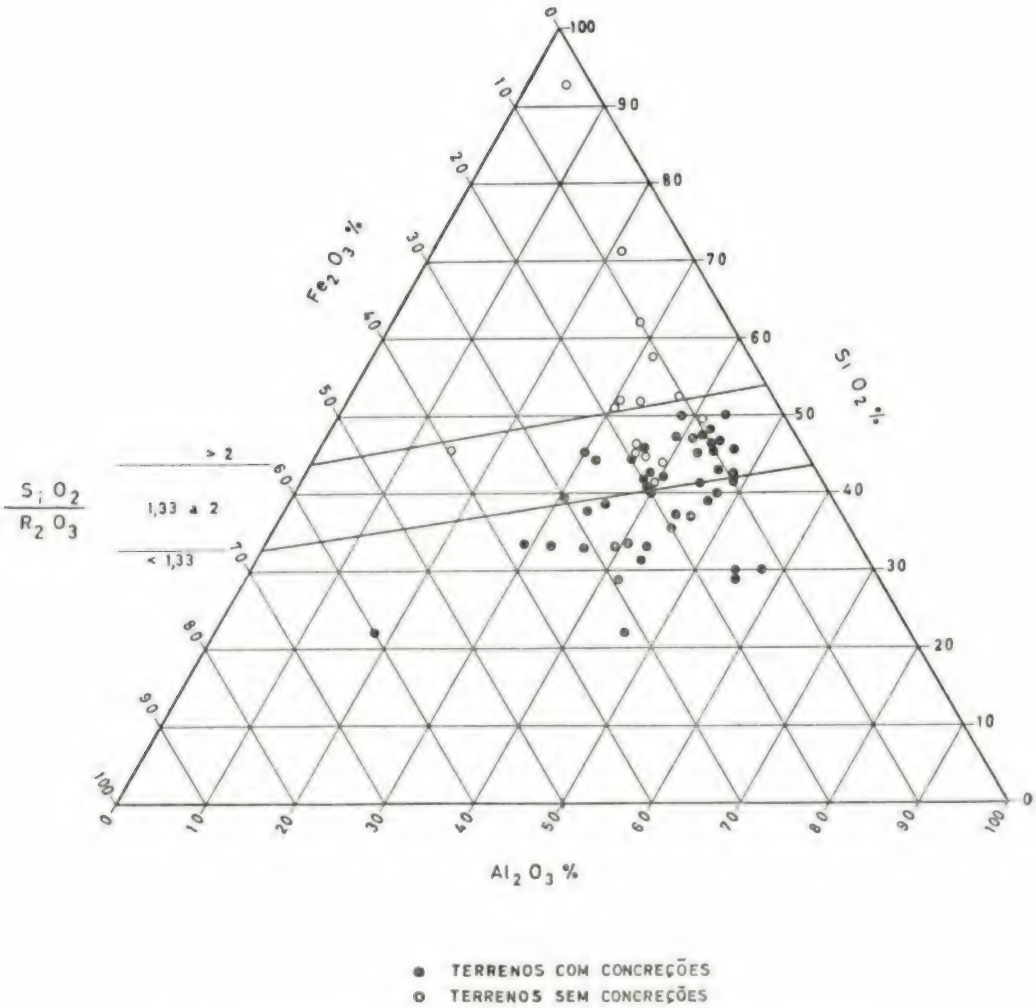


Fig. 7 — Constituição química da fracção argilosa dos solos lateríticos

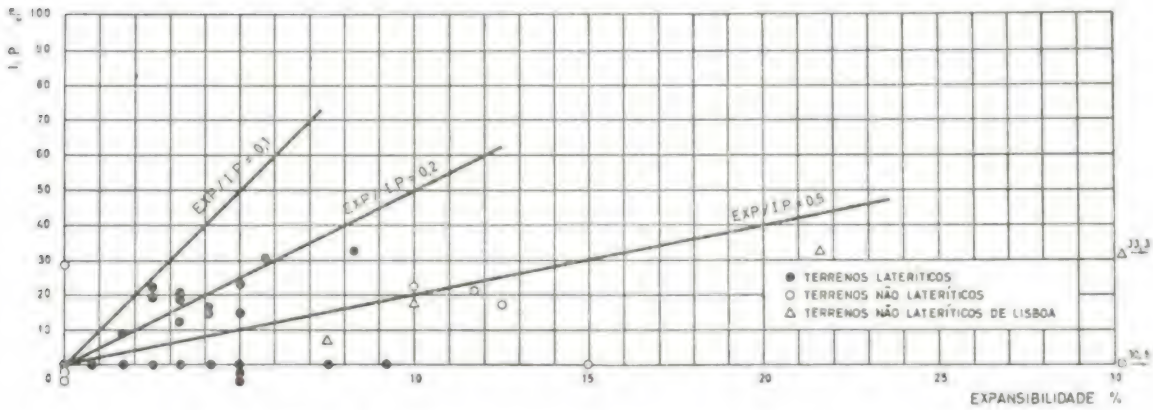


Fig. 8 — Expansibilidade dos terrenos lateríticos comparada com a dos terrenos não lateríticos

respondem a expansibilidades superiores a 10 %.

Modificaram-se por isso as respectivas especificações e actualmente adopta-se, ainda a título experimental, a seguinte:

Bases e sub-bases

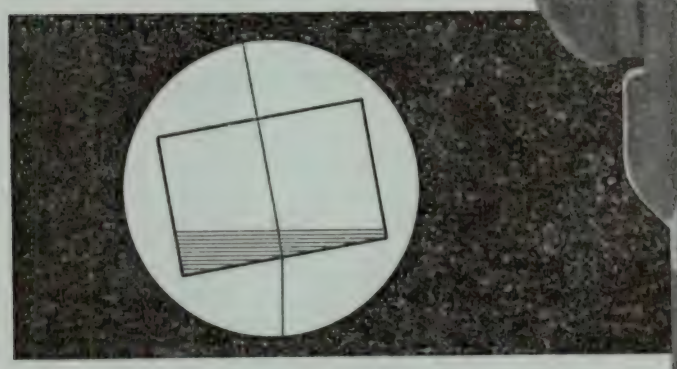
L. L. $\leqslant$ 40 (em vez de 25)
I. P. $\leqslant$ 15 (em vez de 6)

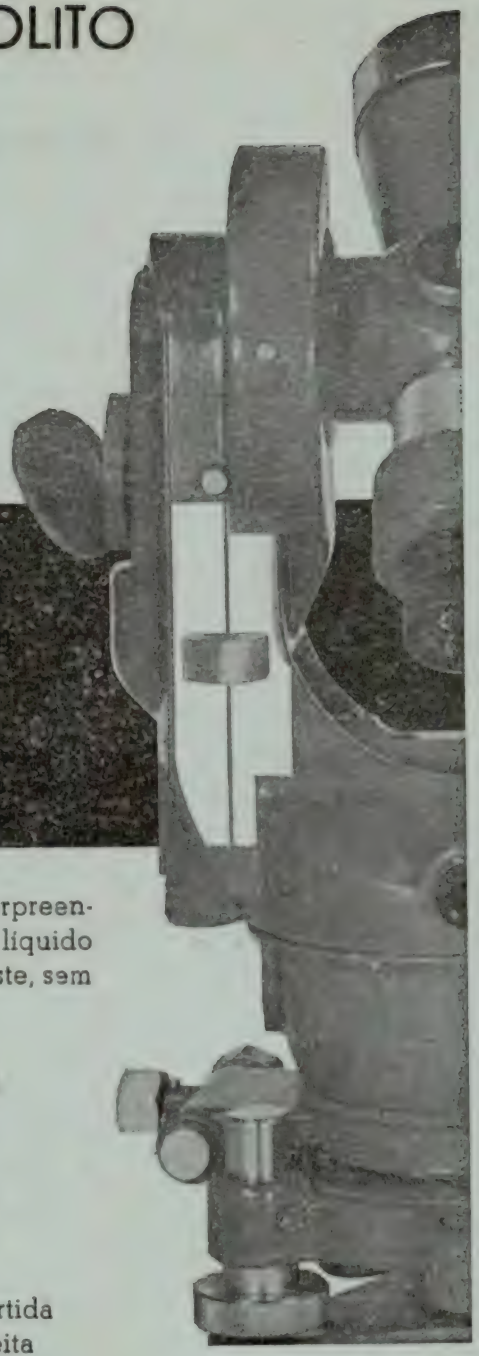
O NOVO TEODOLITO

Wild T 1-A

com calagem
zenital automática

O teodolito com os aperfeiçoamentos mais modernos, permitindo medições mais fáceis, rápidas e mais exactas





Automatismo duma concepção surpreendentemente simples: Prisma com líquido sem partes mecânicas, sem desgaste, sem desarranjos, sem reparações.

Detalhes no prospecto Th 154

WILD
HEERBRUGG

Modelo T 1-A C/imagem invertida
Modelo T 1-A E C/imagem direita

Solicitem catálogo ou demonstração ao representante exclusivo:

WILD PORTUGAL, L.DA

LISBOA — PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8, S/L 6 — Tel. 68 11 27

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

Associada: Empresa de Sondagens e Fundações

TEIXEIRA DUARTE, LDA.

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES de cimento e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

Sede — LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C. P. 2178 — Tel. 4226

LISBOA
P. da Figueira, 18, 3.º Esq.

L. MARQUES — C. P. 982
BEIRA — C. P. 1002

Companhia Portuguesa de Trefilaria

S. A. R. L.

ARMADURAS PRÉ-FABRICADAS **MALHASOL**

Tensão de segurança 3.000 Kg/cm²

AÇO BI

Tensão de segurança 4.000 Kg/cm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO

que pela eficiência técnica e económica a que conduzem, são um indispensável elemento na moderna construção civil

Para qualquer obra em betão armado consulte:

DIAL — GABINETE TÉCNICO

R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º DT.º — LISBOA
TELEFONES 67 12 24/5 E 67 37 85

"IMPERMEÁBILIS"

O IMPERMEABILIZANTE OFICIALMENTE ACONSELHADO EM TODAS AS ARGAMASSAS DE CIMENTO

Prédios, empenas, caves. — Depósitos para água, vinhos e aguardentes. — Facultam-se certificados de ensaio dos Laboratório Nacional de Engenharia Civil e da Junta Nacional do Vinho

Distribuidor geral para todo o Império Português:

ANSELMO DE MATOS

Av. Almirante Reis, 179, r/c. - Tel. 4 64 39 - LISBOA - 1

Revendedores em Lisboa:

João Pereira Vareiro & Filhos, Lda.
Rua Augusto José Vieira, 12 - Tel. 84 74 80

Manuel Pereira Matias, Lda.
Rua de Pedrouços, 105-A - Tel. 61 11 53

Manufacturas de Cimento Fortex, Lda.
Estrada de Benfica, 727 - Tel. 70 21 75

Sequeira & Santos, Lda.
R. José Joaquim Marques, 113 - Tel. 02 61 05 - MONTIJO

Camadas de desgaste

L. L. $\leqslant$ 40 (em vez de 35)
I. P. $\leqslant$ 6 a 15 (em vez de 4 a 9)
Exp. $\leqslant$ 5 % *

Desgaste na máqnina de Los Ângeles

$\leqslant$ 65 % (em vez de 50 %)

III — ESTABILIZAÇÃO COM CIMENTO

1 — *Especificações*

As especificações relativas ao solo-cimento baseiam-se, quanto ao solo, na *granulometria*, na *plasticidade*, na *matéria orgânica* e na existência doutras substâncias prejudiciais como os *sulfatos*, por exemplo; quanto à dosagem em cimento baseiam-se as especificações na *resistência* à *compressão* e na *durabilidade*.

Vejamo-las muito sumàriamente:

a) — *Granulometria*

O Road Research Laboratory (6) tendo em consideração a experiência americana indica os seguintes limites granulométricos para solos econòmicamente estabilizáveis com cimento:

— Dimensão máxima ..... 75 mm (3")
— Passando no peneiro (B.S. 3/16" ou ASTM 4) 4, 76 mm > 50 %
— Passando no peneiro (B.S. 36 ou ASTM 40) 0,42 mm > 15 %
— Passando no peneiro de (N.º 200) 0,074 mm < < 50 %

Trata-se como se vê duma especificação bastante ampla cuja satisfação não apresenta geralmente qualquer dificuldade.

b) — *Plasticidade*

O mesmo R. R. L. fixa os seguintes limites:

L. L. < 40
I. P. < 18

que também são bastante amplos. No entanto o inconveniente dos solos mais plásticos será a maior quantidade de cimento necessária e a maior dificuldade na sua desagregação e pulverização para efeito de mistura do cimento. Peltier (9) refere os seguintes exemplos que são muito sugestivos: um solo com IP = 6 exigirá 8 % de cimento, se IP = 10 já necessitará de 10 % e se IP = 20 já carecerá de 15 % o que, representando cerca de 300 kg/m³, já corresponde às dosagens do betão de cimento.

c) — *Matéria orgânica*

A influência da matéria orgânica é muito perniciosa mesmo em pequena quantidade principalmente por impedir a presa do cimento. São parcularmente nocivos o açúcar e os ácidos húmicos. Em Moçambique, onde entre nós há maior experiência na utilização de solo-cimento, limita-se no respectivo Caderno de Encargos (10) o teor em matéria orgânica a 2 %.

O tratamento prévio do terreno com cal, neutralizando os seus ácidos húmicos, pode tornar possível a sua ulterior utilização com cimento. Segundo indica Peltier (9) 5 % de cal já é suficiente para este efeito.

d) — *Sulfatos*

Os sulfatos são perigosos principalmente porque atacam o cimento Portland normal. Em Moçambique (10) é interdita a utilização de solos cuja fracção argilosa contenha mais de 0,2 % de sulfatos expressos em SO_3.

e) — *Resistência e durabilidade*

A resistência do solo-cimento pode ser especificada pela tensão de rotura à *compressão simples* ou pela perda de peso em ensaios de *durabilidade* como os de *secagem e molhagem* e os de *gelo e desgelo*.

Nos Estados Unidos da América prevalecem geralmente as especificações basedas na durabilidade, originárias da Portland Cement Association (11). Na Inglaterra prevalecem as especificações baseadas na resistência à compressão simples.

No quadro IX resumem-se as especificações referidas.

As especificações americanas baseiam-se nos ensaios de compactação (ASTM — D 558-57 ou AASHO — T 134-57) de molhagem e secagem (ASTM — D 559-57 ou AASHO — T 135-57) e

---

* Aperfeiçoamentos recentes do ensaio de expansibilidade (Elda de Castro, L. N. E. C., Março de 1963), conduziram à alteração deste valor para 10 % (U. Nascimento, E. de Castro, M. Rodrigues, L. N. E. C., Março de 1963).

QUADRO IX

Especificações relativas ao solo-cimento

	Solos		
	A_1, A_{2-4} A_{2-5} e A_3	A_{2-6}, A_{2-7} A_4, A_5	A_6, A_7
	Seixo-arenosos	Siltosos	argilosos
Americanas (P. C. A.)			
Durabilidade (7 dias)			
— Máxima perda de peso (12 ciclos)	14 %	10 %	7 %
— Máxima variação de volume (12 ciclos) . .	2 %	2 %	2 %
Resistência à compressão			
Ensaio expedito (13) Mínima (7 dias)	Solos arenosos 14 a 21 kg/cm² Conforme os ábacos respectivos (fig. 7)		
Resistência à compressão			
Inglesas (B. S.)			
— Mínima (7 dias) . . .	17,6 kg/cm²		
— Máxima (7 dias) . . .	25 kg cm² (9)		
Durabilidade			
— Resistência à compressão após 7 dias de cura + 7 dias de imersão, comparada com a resistência aos 14 dias de cura sem imersão.	⩾ 80 % (12)		
— Resistência após 14 ciclos de gelo e desgelo comparada com a resistência de provetes padrão da mesma idade	⩾ 80 % (12)		

de gelo e desgelo (ASTM — D 560-57 ou AASHO — T 136-57).

Como estes ensaios demoram mais de um mês a realizar a P. C. A. desenvolveu recentemente um ensaio expedito (13) que tem por base a resistência à compressão simples dada por «ábacos». Estes ábacos foram traçados relacionando a resistência à compressão aos 7 dias de 2 229 solos com as especificações baseadas nos ensaios de durabilidade.

O método só é válido para solos arenosos que contenham menos de 50 % de material inferior a 0,05 mm (silte mais argila) e menos de 20 % de material inferior a 0,05 mm (argila).

O método apresenta duas modalidades: o método A para solos que passam no peneiro n.º 4 (4,76 mm); e o método B para solos contendo material retido no peneiro n.º 4.

A resistência mínima aos 7 dias tem que ser a indicada pelos ábacos que se indicam na fig. 7. Se for inferior terá que se efectuar o ensaio de durabilidade que fixará em definitivo a dosagem a adoptar.

As especificações inglesas têm por base os ensaios da norma B. S. 1924 : 1957 (Methods of Test for Stabilized Soils).

2 — *Projecto duma estabilização com cimento*

a) — *Dosagem com cimento*

A dosagem em cimento dum solo-cimento é feita ensaiando duas ou três dosagens, geralmente afastadas de 2 % à roda da dosagem provável para o tipo de solo em causa. Determinadas as resistências à compressão ou as perdas de peso no ensaio de durabilidade em função da dosagem, será fácil, por interpolação, calcular a dosagem mínima correspondente à especificação adoptada.

Uma dosagem excessiva não convém para que o solo-cimento não funcione como laje formando portanto grandes fissuras de flexão e retracção. Peltier (9) indica 25 kg/cm² como limite superior da resistência.

As normas da P. C. A (13) indicam todos os passos a seguir para a determinação da dosagem mínima.

b) — *Dimensionamento*

O dimensionamento dos pavimentos em solo-cimento costuma fazer-se pelo método C. B. R., como os pavimentos flexíveis. No entanto, dada a maior rigidez do solo-cimento, há um certo efeito de laje, que melhora a distribuição das cargas no terreno de fundação. Há por isso uma certa tendência em tomar para *espessura de cálculo* pelo método C. B. R. a *espessura efectiva* multiplicada por um certo coeficiente. Estão em curso na Inglaterra experiências em troços experimentais tendentes a fixar o valor deste coeficiente (12); entretanto, Peltier (9) sugere o valor médio de (4/3) quer dizer a espessura de cálculo seria a espessura efectiva acrescida de 1/3.

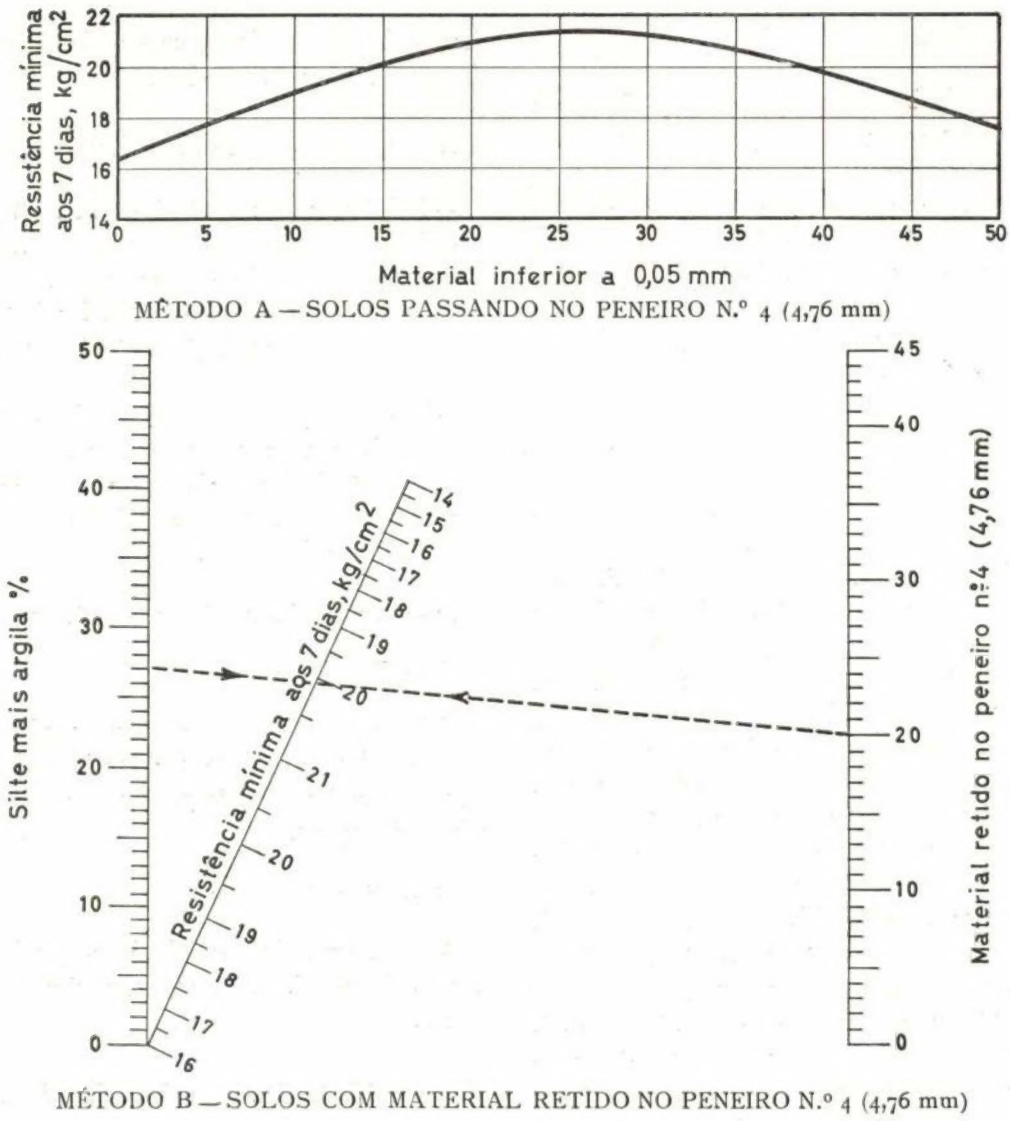


Fig. 9 — Ábacos do método expedito da P. C. A. para fixação da resistência mínima aos 7 dias de solos arenosos estabilizados com cimento

IV — ESTABILIZAÇÃO COM BETUME

Os principais efeitos do betume numa estabilização de terrenos são o aumento da resistência, por efeito do aumento da coesão e a diminuição da susceptibilidade à água.

A adição de betume pode ser feita por *regas* sucessivas de modo a obter-se uma *penetração* do material betuminoso na superfície do terreno, ou por *mistura*. No primeiro caso não se consegue estabilizar mais do que alguns milímetros de espessura, quando muito 1 a 2 centímetros, e pode consumir-se 1 a 5 l/m² de material betuminoso; no segundo caso podem atingir-se espessuras de 10 a 20 cm com pleno controle da dosagem, assegurando-se um melhor aproveitamento das características do material.

É corrente dividir as estabilizações em dois tipos: o *solo-betume*, em que o terreno é um solo coesivo e a *areia-betume* em que o terreno é uma areia sem coesão. No primeiro tipo, o terreno já tem alguma coesão e, se se conservasse seco, não precisaria provàvelmente de qualquer estabilização; a acção do betume é mais de defesa contra a água do que para aumentar a resistência mecânica.

No segundo tipo, nas areias, cuja resistência mecânica é quase insensível à água, a acção do betume é dar-lhes coesão.

1) — *Especificações*

As especificações correntes dizem respeito ao solo, aos materiais betuminosos e à mistura. Vejamo-las sumàriamente:

a) — *Granulometria e plasticidade*

Para os solo-betumes o Highway Research Board preconiza a seguinte especificação:

Passando ao pen. n.º	4	(4,76 mm)	> 50 %
» » » »	40	(0,42 mm)	35 a 100 %
» » » »	200	(0,074 mm)	10 a 50 %

L. L. < 40
I. P. < 18

b) — *Material betuminoso*

Os materiais betuminosos utilizados são geralmente os *cut-backs* e as *emulsões*.

Os cut-backs, segundo as especificações ASTM, distinguem-se, como se sabe, pelas rapidez da *cura*, em «cut-backs» de *cura rápida* («rapid curing» ou R. C.) e de *cura média* («medium curing» ou M. C.) e de *cura lenta* («slow curing» ou S. C.) consoante o diluente betume é do tipo da gasolina, do petróleo ou do gasóleo, respectivamente. Cada um destes tipos tem várias graduações de viscosidade resultante quer da natureza do betume quer da sua concentração na diluição.

A American Road Builders Association (A. R. B. A.) (15) deixa à escolha as graduações 1 a 4 de qualquer dos tipos. No entanto para os solo-betumes são mais correntes os MC. 1 e MC. 2.

Para as emulsões a AASHO (M 140-49) especifica três tipos de emulsões quanto à rotura: rápida (R. S.), *média* (M. S.) e lenta (S. S.) subdividindo os dois primeiros em várias graduações de viscosidade e consistência. Para os materiais grosseiros, em grande parte retidos no peneiro de 3,18 mm (18") e, pràticamente sem material retido no peneiro 200 (0,074 mm), recomenda as emulsões de rotura média (M. S.); para os materiais passando em grande parte no peneiro de 3,18 mm (1/8") e alguma quantidade no peneiro 200, recomenda a emulsão de rotura lenta S. S.

c) — *Misturas*

As especificações para a mistura são geralmente estabelecidas com base no ensaio Hubbard-Fiel modificado e adoptado pela ASTM sob a designação D 915-47 T.

Provetes com diâmetro e altura de 50,8 mm (2") são compactados sob 2 722 kg (6000 libras) e depois de submetidos a uma embebição em àgua durante 7 dias são submetidos a um ensaio de extrusão.

As expecificações recomendam o seguinte:

— Máxima absorção de água . . . 2 %
— Máximo aumento de volume 2 %
— Mínima resistência à extrusão:
  — com embebição 181 kg (400 libras)
  — sem embebição 454 kg (1000 libras)

Há outras especificações que se baseiam no *penetrómetro de cone*, preconizando uma resistêcia mínima de 80 kg/cm² (6), ou no ensaio de California que especifica uma resistência no mínimo de 1,75 kg/cm² (25 ps).

2) — *Projecto duma mistura betuminosa*

a) — *Dosagem*

Tal como o solo-cimento a escolha da dosagem a adoptar é feita ensaiando a absorção de água e a resistência de provetes preparados com várias dosagens.

b) — *Dimensionamento*

A espessura da camada é em geral calculada pelo método C. B. R. como pavimento flexível que é.

V — OUTROS TIPOS DE ESTABILIZAÇÃO

1 — *Estabilização com cal*

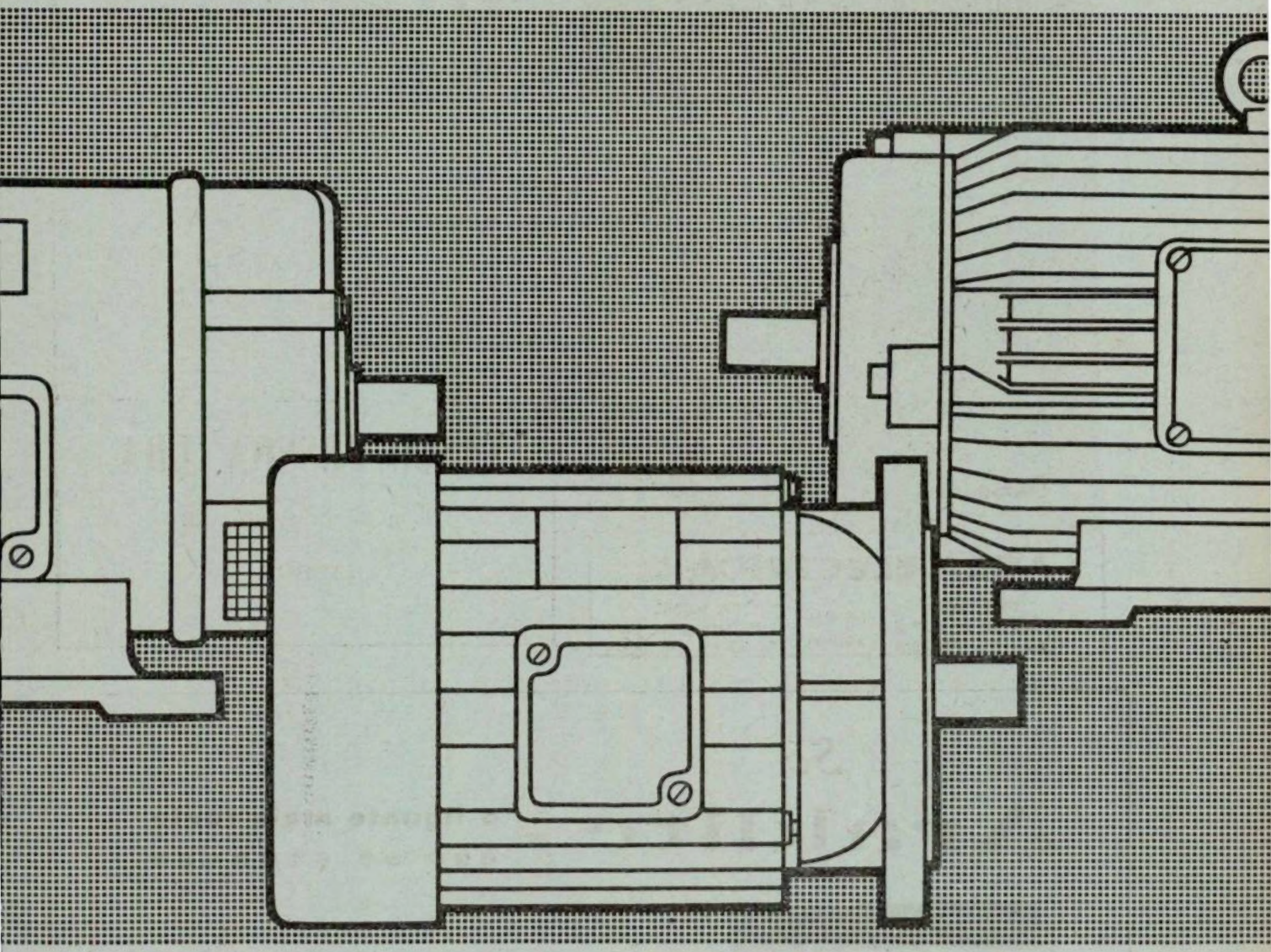
A estabilização com cal, geralmente apagada e em pó, só por si ou misturada com pozolanas ou cinzas volantes está despertando muito interesse.

A cal hidratada pode melhorar a plasticidade dos solos pouco plásticos, tais como o granito decomposto, seixo, etc., ou reduzir a plasticidade de argilas muito plásticas (16). Funciona portanto com um *correctivo de plasticidade*.

Pode também ser utilizada como um *aditivo* para o solo-cimento fazendo aumentar a resistência deste e, por consequência, permitindo reduzir a sua dosagem (17).

Pode ainda ser utilizada em substituição do cimento como agente estabilizador em percentagens da ordem de 6 % ou superiores. Tem no entanto o inconveniente de ser muito susceptível aos ciclos de gelo e desgelo (19 pág. 114).

Motores eléctricos



Servimos o **progresso técnico**
em todos os sectores da indústria.
Os mais modernos conhecimentos, obtidos na investigação científica e na experiência sob severas condições de serviço, também são considerados na construção dos nossos motores.
Assim, é garantida a sua **alta qualidade.**

MOTRA ENAE **SIEMENS**

REPRESENTANTES E DISTRIBUIDORES

SIEMENS

COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, S. A. R. L.

LISBOA • AV. ALMIRANTE REIS, 65 PORTO • R. DAS CARMELITAS, 12